物性研究 38－6 (1982－9)

講義ノート

8-バーテックスモデルとXYZモデル

東北大・工　桂　重　俊

(1982年7月13日受理)

はじめに

1971年にBaxterは2次元の8－vertex モデルの自由エネルギーを転送行列の方法で求めた。このモデルは特殊な場合としてIsingモデル，dimer モデル，ice モデル，KDP モデル，Fモデル等を含む一般的なモデルである。またBaxter はこの転送行列の固有ベクトルがHeisenberg モデルの一般化である1次元XYZモデルのハミルトニアンの固有ベクトルになっていることを示し，これからその基底エネルギーを求めた。

Baxter の論文は〝a masterpiece of 19th-century mathematical analysis〟とも言われているが，むしろ〝a masterpiece of 20th-century mathematical physics〟と言うべきであろう。Phys. Rev. Lett. の論文[3,4]は勿論，Ann. Phys. の論文[1,2]も省略されている部分が多く，孤峰として聳えたまま登山をする人は少なかった。しかし最近量子逆散乱法が脚光をあびるに至って，8－vertex モデルあるいは1次元XYZ モデルがその例題としてしばしば誌面を賑わすようになった。Takhadzhan-Faddeev の解説[5]を参照にしながら，10年前読もうと思って途中でやめた論文をもう一度読もうと思いたった所以である。今度東京工業大学において「スピン系の統計力学」と題する集中講義を行なったが，8－vertex モデルの話も加えることとし，これを機会にそのノートをまとめた。

本稿を草するに当ってE. Barouch，和達三樹，および同研究室の方々，広池和夫，守田徹，鈴木増雄，宮下精二，小口武彦の諸氏[6,7]から多くの御教示を頂いたことを記して厚く謝意を表する。

§1.　16-vertex モデル，8-vertex モデル，6-vertex モデル

2次元の正方格子を考えて各格子点間を結ぶbond に上向，下向，または左向，右向，のいづれかの矢をつける。各格子点とこれに入る4本のbond を見るとこの格子点には16個の状態がある。この各状態に ϵ_1，ϵ_2 … ϵ_{16} のエネルギーを割付けたモデルが16－vertex モデルである。この16個の配置のうち1つの格子点に奇数本のbond が入る状態が禁止されるとす

＊　KATSURA, Shigetosi

ると(ϵ_9, ϵ_{10} … $\epsilon_{16}=\infty$)可能な状態として8個の状態が許される。これが広義の8−vertexモデルである。一つの格子点に対して4つのbondを反転したものと，もとのもののenergyが等しいとする。($\epsilon_1=\epsilon_2$, $\epsilon_3=\epsilon_4$, $\epsilon_5=\epsilon_6$, $\epsilon_7=\epsilon_8$)(これはzerofieldの条件である。)これが狭義の8−vertexモデル(Baxterモデル)である。この内4本ともvertexに向ったもの，4本ともvertexから出るものを除くと($\epsilon_7=\epsilon_8=\infty$)可能な状態は6個となる。これが6−vertexモデルである。そのうちKDPモデルといわれるものはTakahasi, Liebによる強誘電体のモデルである*。本稿では狭義の8 vertexモデルを単に8−vertexモデルという。

8−vertexモデルの一つの配置が与えられたとき各格子点は ϵ_1, … ϵ_8 の何れかの状態をとる。系全体で ϵ_j のエネルギーをもつvertexの数を N_j とすれば系の状態和は

$$Z_{\mathrm{MN}}=\sum \exp\left[-\beta\sum_{j=1}^{8} \mathrm{N}_j\,\epsilon_j\right] \tag{1.1}$$

で与えられ，1格子点当りの自由エネルギー f は

$$-\beta f=\lim_{\substack{\mathrm{M}\to\infty\\ \mathrm{N}\to\infty}} \frac{1}{\mathrm{MN}}\log Z_{\mathrm{MN}} \tag{1.2}$$

で与えられる。ここにM, Nは結晶の縦および横の格子点の数である。

各状態のBoltzmann因子を

$$v_j=\mathrm{e}^{-\beta\epsilon_j} \tag{1.3}$$

$$v_1=v_2 \qquad v_3=v_4 \qquad v_5=v_6 \qquad v_7=v_8$$

とし

$$w_1=\frac{1}{2}(v_5+v_7) \qquad v_2=\frac{1}{2}(v_5-v_7) \tag{1.4}$$

$$w_3=\frac{1}{2}(v_1-v_3) \qquad v_4=\frac{1}{2}(v_1+v_3)$$

とおく。

この系の状態和 Z は w_1, w_2, w_3, w_4 の関数であるが(1, 2, 3, 4)の任意の置換(i, j, k, l)に対して $Z(w_1, w_2, w_3, w_4)=\mathrm{Z}(\pm w_i, \pm w_j, \pm w_k, \pm w_l)$ が成立つ(Fan and Wu 1970)。

3節以下でこの系の状態和を転送行列を用いて求めることを考えるが，その前に先ずIsingモデルとの関連を考えておこう。

1) R. J. Baxter, Ann. Phys. **70** (1972) 193–228.
2) R. J. Baxter, Ann. Phys. **70** (1972) 323–337.

* Slaterの求めたCurie点がexactであることをTakahasiが証明し，Liebがexactな状態和を与えた。

3) R. J. Baxter, Phys. Rev. Lett. **26** (1971) 832–833.
4) R. J. Baxter, Phys. Rev. Lett. **26** (1971) 834.
5) L. A. Takhadzhan and L. D. Fadeev, Uspekhi Mat. Nauk **34** (1979) 13–63; Russian Math. Surveys **34** (1979) 11–68.
6) 和達三樹，十河清，打波守，阿久津泰弘， private communication.
7) 広池和夫，守田徹， private communication.

§2. 8-vertex model とIsing model

Ising modelにおいて一つのスピン配置が与えられたとき各 unit cell の中心を結ぶ裏格子を作る。この裏格子においてある bondを考え，その両側の表格子のスピンが異符号のとき実線，同符号であるとき点線で結ぶ。各実線に上または右向きの矢，点線に下または左向きの矢をつけるとこの裏格子は一つの 8−vertex モデルの configuration を与える。裏格子の各 vertex にその vertex をとりかこむ表格子の４つのスピンの作るクラスターの nearest neighbor bond ４本によるエネルギーの半分と second neighbor bond ２本によるエネルギーをわりつければこのIsing model とこの 8−vertex model は同等となる。水平方向，垂直方向の energy を J, J' 右斜方向，左斜方向の energy を J'', J''' としたときの vertex weight は Fig. 2 のようになる。(first neighborのエネルギーを半分にしたのはとなりの vertex によって２重に数えられるからである。) 逆に一つの 8−vertex model の arrow configuration が与えられれば Ising model のスピン configuration が定まる。但しすべてのスピンを同時に反転したものも同じ 8−vertex model の configuration に対応するので２重の縮退がある。

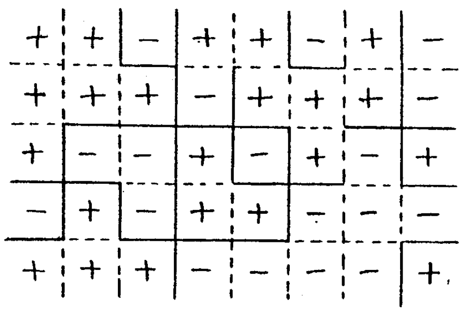


Fig. 1

この 8−vertex モデルは Baxter のといたモデルのカテゴリー ($v_1 = v_2$, $v_3 = v_4$, $v_5 = v_6$, $v_7 = v_8$) に入らないが nearest neighbor の相互作用 $J = J' = 0$ とするとこの条件をみたす。$J = J' = 0$ とした表格子は nn が J'', J''' である２つの独立な Ising 模型の重ね合わせである。8−vertex モデルの転移温度は

$$w_1 = \frac{1}{2}(v_5 + v_7),\quad w_2 = \frac{1}{2}(v_5 - v_7),\quad w_3 = \frac{1}{2}(v_1 - v_3),\quad w_4 = \frac{1}{2}(v_1 + v_3)$$

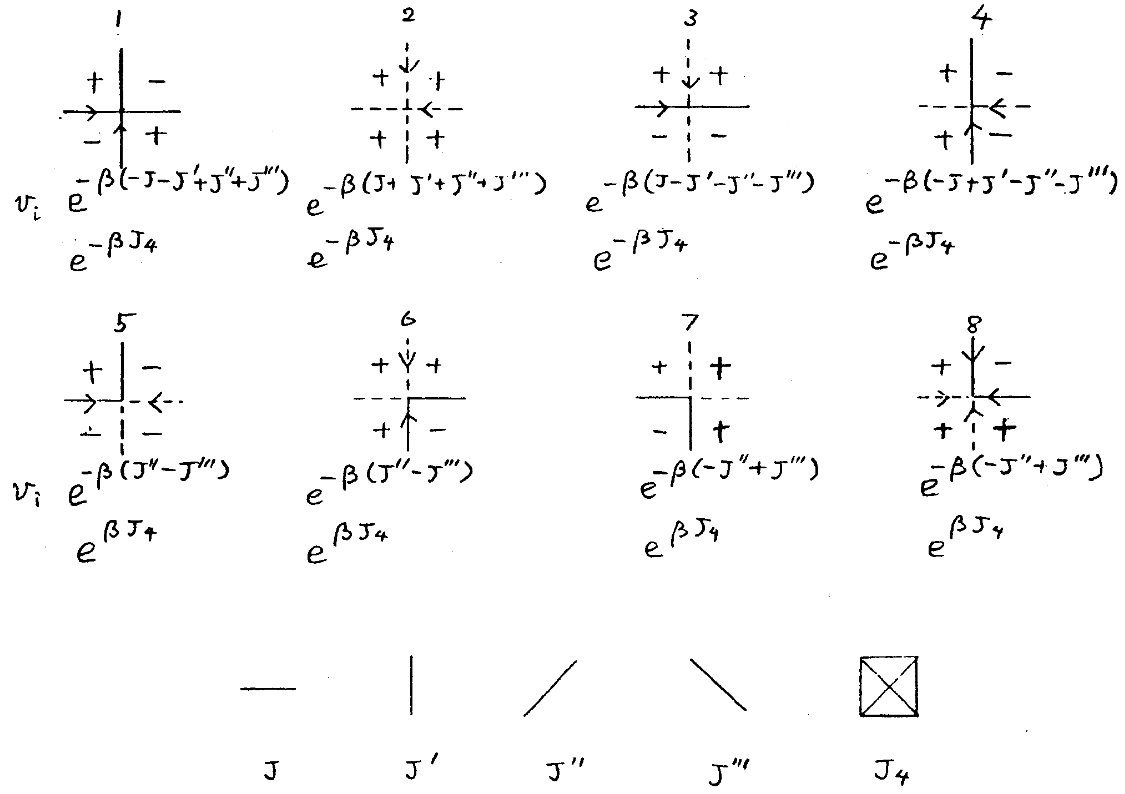


Fig. 2

とし， w_iを大きさの順に並べかえて

$$w_1^* = \text{first}\,(w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4)$$
$$w_2^* = \text{second}\,(w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4)$$
$$w_3^* = \text{third}\,(w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4)$$
$$w_4^* = \text{fourth}\,(w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4)$$

としたとき $w_2^* = w_3^*$ で与えられる（証明後述）。上例で $J'' = J'''$ とすると $w_1 = \mathrm{ch}\,2K$， $w_2 = \mathrm{sh}\,2K$， $w_3 = 1$， $w_4 = 0$ となり $T > T_C$， $T < T_C$ の何れの場合も T_C は $\mathrm{sh}\,2K = 1$ で与えられる。これは Kramers-Wannier-Onsager の値である。なおもとの格子に 4 体力がある場合 Boltzmann 因子は $\exp(-\beta J_4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4)$ となるが 1 ～ 8 の配置に対してこの因子は Fig. 1 に示すようになり，このときも $v_1 = v_2$， $v_3 = v_4$， $v_5 = v_6$， $v_7 = v_8$ はみたされているから J''， J''' をもつ 2 層の Ising モデルが 4 体力の相互作用でつながれているモデルも厳密にとける。

§3. 8-vertex model の転送行列

$N \times M$ の 8－vertex モデルを考える。各 bond について矢の向が上向のとき $\alpha = 1$。下向き

のとき $\alpha=-1$，右向きのとき $\gamma=1$，左向きのとき $\gamma=-1$ とする。第 j 行と第 $j+1$ 行の間の bond の垂直な矢の任意の配置を

$$\{\alpha^j\}=\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\ \alpha_N\} \qquad (3.1)$$

とする。

一つの格子点をめぐる配位はその点の下の bond α，上の bond α'，左の bond γ，右の bond γ' で表わされる。矢の向きは混同しやすいので以下入る矢を実線，出る矢を点線で示す。（各の vertex についてのみ可能な記法で結晶全体についての記法ではない。）

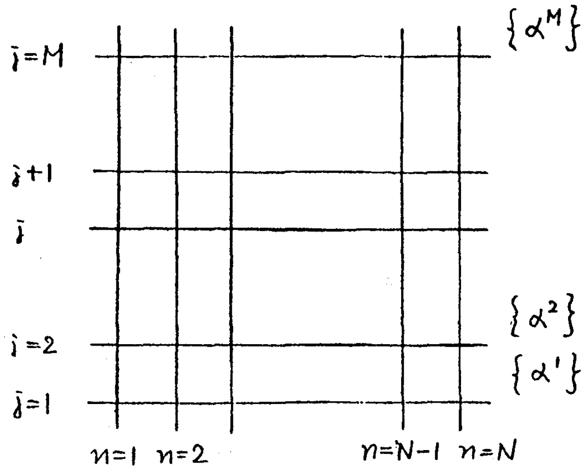
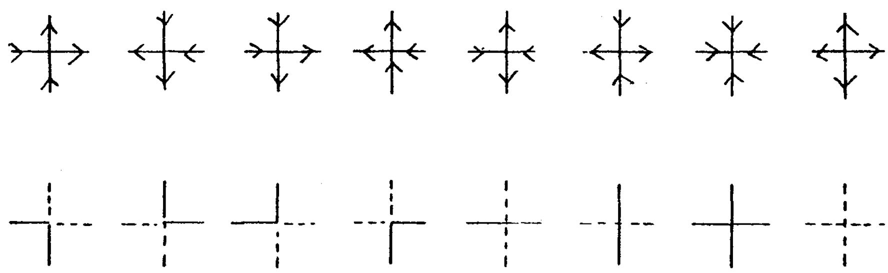


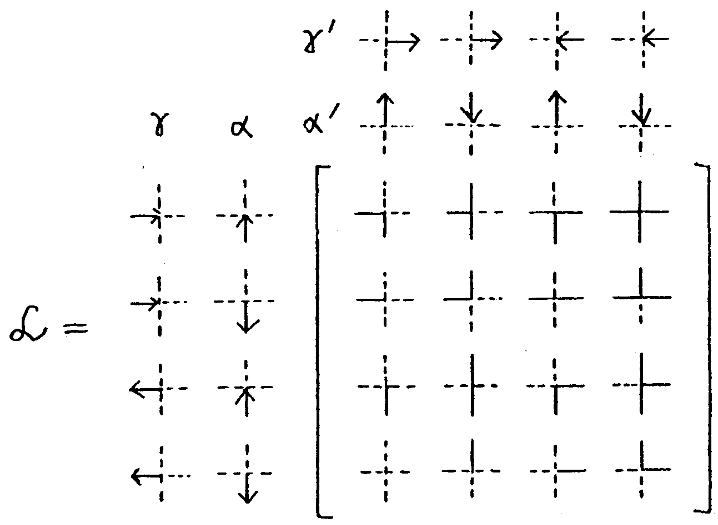
Fig. 3



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
α	1	−1	−1	1	−1	1	1	−1
α'	1	−1	−1	1	1	−1	−1	1
γ	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1
γ'	1	−1	1	−1	−1	1	−1	1

Fig. 4

ある vertex の状態の Boltzmann 因子を $\langle \gamma\alpha|\mathscr{L}|\gamma'\alpha'\rangle$ と記す。これは足が2組ある行列であるが，その足の順序を（3.2）のようにとると



(3.2)

$$
= \begin{array}{ccc|cccc}
 & & \gamma' & 1 & 1 & -1 & -1 \\
\gamma & \alpha & \alpha' & 1 & -1 & 1 & -1 \\
\hline
1 & 1 & & v_1 & 0 & 0 & v_7 \\
1 & -1 & & 0 & v_3 & v_5 & 0 \\
-1 & 1 & & 0 & v_6 & v_4 & 0 \\
-1 & -1 & & v_8 & 0 & 0 & v_2
\end{array} \tag{3.3}
$$

この$\mathscr{L}$に vertex の横方向の位置 n を添字としてつけて

$$<\gamma\alpha|\mathscr{L}_{\mathrm{n}}|\gamma'\alpha'>=\sum_{j=1}^{4} w_j\, \sigma^j_{\gamma\gamma'}\ \ \sigma^j_{\mathrm{n}\alpha\alpha'} \tag{3.4}$$

すなわち

$$\mathscr{L}_{\mathrm{n}}=\sum_{j=1}^{4} w_j\, \sigma^j \otimes \sigma^j_{\mathrm{n}} \tag{3.4'}$$

であらわされる。$\otimes$は行列の直積, $\sigma^j(j=1,\ 2,\ 3)$ は pauli 行列, σ_4は 2×2 の単位行列である*。

証

$$\mathscr{L}=w_1\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}+w_2\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}+w_3\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$
$$+w_4\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

---

* $\sigma^1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ $\sigma^2=\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}$ $\sigma^3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ $\sigma^4=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$$<\gamma\alpha|A\otimes B|\gamma'\alpha'>=<\gamma|A|\gamma'><\alpha|B|\alpha'>$$

$$=\begin{bmatrix} & & & w_1 \\ & & w_1 & \\ & w_1 & & \\ w_1 & & & \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} & & & -w_2 \\ & & w_2 & \\ & w_2 & & \\ -w_2 & & & \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} w_3 & & & \\ & -w_3 & & \\ & & -w_3 & \\ & & & w_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} w_4 & & & \\ & w_4 & & \\ & & w_4 & \\ & & & w_4 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} w_3+w_4 & 0 & 0 & w_1-w_2 \\ 0 & w_4-w_3 & w_1+w_2 & 0 \\ 0 & w_1+w_2 & w_4-w_3 & 0 \\ w_1-w_2 & 0 & 0 & w_3+w_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_1 & 0 & 0 & v_7 \\ 0 & v_3 & v_5 & 0 \\ 0 & v_5 & v_3 & 0 \\ v_7 & 0 & 0 & v_1 \end{bmatrix}$$

$=(3.3)$　　証終 (3.5)

(3.5)を2行2列づつまとめると

$$\mathscr{L}_{\mathrm{n}}=\begin{array}{c|cc} \gamma \backslash \gamma' & 1 & -1 \\ \hline 1 & w_4\sigma_{\mathrm{n}}^4+w_3\sigma_{\mathrm{n}}^3 & w_1\sigma_{\mathrm{n}}^1-iw_2\sigma_{\mathrm{n}}^2 \\ -1 & w_1\sigma_{\mathrm{n}}^1+iw_2\sigma_{\mathrm{n}}^2 & w_4\sigma_{\mathrm{n}}^4-w_3\sigma_{\mathrm{n}}^3 \end{array} \tag{3.6}$$

とかける。σ_{n} の中に入っている足が $\alpha\alpha'$ である $(<\alpha|\sigma_{\mathrm{n}}|\alpha'>)$

ある行(第 j 行)を考えてその行の各 vertex ($\mathrm{n}=1, 2, \cdots N$) の配位に対する $\mathscr{L}$ を $<\gamma\alpha_1|\mathscr{L}_1|\gamma'\alpha_1'>$, $<\gamma'\alpha_2|\mathscr{L}_2|\gamma''\alpha_2'>\cdots<\gamma^{(N-1)}\alpha_N|\mathscr{L}_{\mathrm{n}}|\gamma\alpha_N'>$ とする。

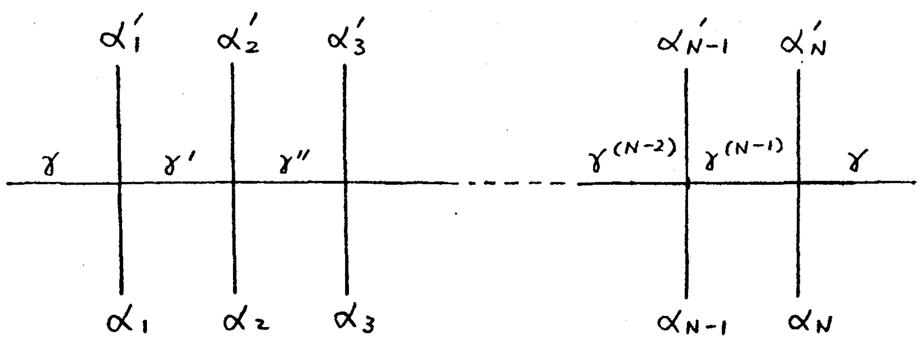


Fig. 5

横 bond はつながれているので $\mathscr{L}_{\mathrm{n}}$ の ket の γ と $\mathscr{L}_{\mathrm{n}+1}$ の bra の γ は同じである。

$$\mathscr{T}_N\equiv\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2\cdots\mathscr{L}_N \tag{3.7}$$

により $\mathscr{T}_N$ を定義する。以下 N は紛れる恐れのないときは省略することもある。(3.10)の積は横 bond については内積をとり縦 bond については直積をとっているので $\mathscr{T}_N$ は $2^{N+1}\times2^{N+1}$ 次元の行列である。

$$<r\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_N|\mathcal{T}_N|r^{(N)}\alpha'_1\alpha'_2 \cdots \alpha'_N>$$
$$=\sum_{r'}\sum_{r''}\cdots\sum_{r^{(N-1)}}<r\alpha_1|\mathcal{L}_1|r'\alpha'_1><r'\alpha_2|\mathcal{L}_2|r''\alpha'_2>\cdots$$
$$\times<r^{(N-1)}\alpha_N|\mathcal{L}_N|r^{(N)}\alpha'_N> \tag{3.8}$$

(3.8)に(3.4)を代入すると例えば$N=3$では

$$\mathcal{T}_3=\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\mathcal{L}_3$$
$$=\sum_{j_1}\sum_{j_2}\sum_{j_3} w_{j_1}w_{j_2}w_{j_3}\underbrace{\sigma^{j_1}\sigma^{j_2}\sigma^{j_3}}_{2\text{行}2\text{列}}\otimes\underbrace{\sigma_1^{j_1}\sigma_2^{j_2}\sigma_3^{j_3}}_{2^3\text{行}2^3\text{列}} \tag{3.9}$$

となる。

$\mathcal{T}_N$ のr部分のトレースをT_Nとする。これは$2^N\times2^N$の行列である。

$$T_N=\mathrm{tr}\,\mathcal{T}_N \tag{3.10}$$

$$<\{\alpha\}|T_N|\{\alpha'\}>=<\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N|T_N|\alpha'_1\alpha'_2\cdots\alpha'_N>$$
$$=\sum_r<r\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N|\mathcal{T}_N|r\alpha'_1\alpha'_2\cdots\alpha'_N>$$
$$=\sum_r\sum_{r'}\cdots\sum_{r(N-1)}<r\alpha_1|\mathcal{L}_1|r'\alpha'_1><r'\alpha_2|\mathcal{L}_2|r''\alpha'_2>\cdots<r^{(N-1)}\alpha_N|\mathcal{L}_N|r\alpha'_N> \tag{3.11}$$

第$j-1$行から出て第j行へ入る縦bondの組を$\{\alpha^j\}$，第j行から出て第$j+1$行へ入る縦bondの組を$\{\alpha^{j+1}\}$とすると$<\{\alpha^j\}|T_N|\{\alpha^{j+1}\}>$は第$j$行の転送行列でこれを$j=1,\ 2,\ \cdots\ M$についてかけて$\{\alpha\}$についての和をとれば周期的条件の下における系の状態和Z_{MN}となる。

$$Z_{\mathrm{MN}}=\sum_{\{\alpha^1\}}\sum_{\{\alpha^2\}}\cdots\sum_{\{\alpha^M\}}<\{\alpha^1\}|T_N|\{\alpha^2\}>$$
$$\times<\{\alpha^2\}|T_N|\{\alpha^3\}>\cdots<\{\alpha^{M-1}\}|T_N|\{\alpha^M\}>$$
$$\times<\{\alpha^1\}|T_N|\{\alpha^1\}> \tag{3.12}$$
$$=\mathrm{Sp}\,T_N^M \tag{3.13}$$

Spは$\sum_{\{\alpha^1\}}$を示し$2^N\times2^N$次元空間のトレースである。

従って転送行列Tの最大固有値を$\Lambda_{\max}(N)$とすれば，

$$-\beta f=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log|\Lambda_{\max}(N)| \tag{3.14}$$

で与えられる。

$w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4$をもつ$\mathcal{T}(<r\{\alpha\}|\mathcal{T}|r'\{\alpha'\}>)$と$w'_1,\ w'_2,\ w'_3,\ w'_4$をもつ$\mathcal{T}'(<r\{\alpha\}|\mathcal{T}'|r'\{\alpha'\}>)$を考えてその縦bondについて内積，横bondについて直積をとったものを$\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}'$と

記す。すなわち

$$
\begin{aligned}
&<\gamma\delta\{\alpha\}|\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}'|\gamma'\delta'\{\beta\}> \\
&=\sum_{\{\alpha'\}}<\gamma\{\alpha\}|\mathcal{T}|\gamma'\{\alpha'\}><\delta\{\alpha'\}|\mathcal{T}'|\delta'\{\beta\}>
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

いま横bondの2組の足をもつ行列$\mathcal{R}(<\gamma\delta|\mathcal{R}|\gamma'\delta'>)$と$\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}'$との内積$\mathcal{R}(\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}')$を

$$
\begin{aligned}
&<\gamma\delta\{\alpha\}|\mathcal{R}(\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}')|\gamma'\delta'\{\alpha'\}> \\
&=\sum_{\gamma''}\sum_{\delta''}<\gamma\delta|\mathcal{R}|\gamma''\delta''><\gamma''\delta''\{\alpha\}|\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}'|\gamma'\delta'\{\beta\}>
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

によって定義する。同様に$(\mathcal{T}'\otimes\mathcal{T})\mathcal{R}$は

$$
\begin{aligned}
&<\gamma\delta\{\alpha\}|(\mathcal{T}'\otimes\mathcal{T})\mathcal{R}|\gamma'\delta'\{\beta\}> \\
&=\sum_{\gamma''}\sum_{\delta''}<\gamma\delta\{\alpha\}|\mathcal{T}'\otimes\mathcal{T}|\gamma''\delta''\{\alpha'\}><\gamma''\delta''|\mathcal{R}|\gamma'\delta'>
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

である

(3.16)=(3.17)であれば

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\gamma''}\sum_{\delta''}\sum_{\{\alpha'\}}<\gamma\delta|\mathcal{R}|\gamma''\delta''><\gamma''\{\alpha\}|\mathcal{T}|\gamma'\{\alpha'\}><\delta''\{\alpha'\}|\mathcal{T}'|\delta'\{\beta\}> \\
&=\sum_{\gamma''}\sum_{\delta''}\sum_{\{\alpha'\}}<\gamma\{\alpha\}|\mathcal{T}'|\gamma''\{\alpha'\}><\delta\{\alpha'\}|\mathcal{T}|\delta''\{\beta\}><\gamma''\delta''|\mathcal{R}|\gamma'\delta'>
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

$\sum_{\gamma'}\sum_{\delta'}<\gamma'\delta'|\mathcal{R}^{-1}|\gamma'''\delta'''>$を(3.18)の両辺の右からかけると

$$
\begin{aligned}
\text{右辺}&=\sum_{\gamma''}\sum_{\delta''}\sum_{\{\alpha'\}}<\gamma\{\alpha\}|\mathcal{T}'|\gamma''\{\alpha'\}><\delta\{\alpha'\}|\mathcal{T}|\delta''\{\beta\}> \\
&\quad\times<\gamma''|\gamma'''><\delta''|\delta'''> \\
&=\sum_{\{\alpha'\}}<\gamma\{\alpha\}|\mathcal{T}'|\gamma'''\{\alpha'\}><\delta\{\alpha'\}|\mathcal{T}|\delta'''\{\beta\}>
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{左辺}&=\sum_{\gamma''}\sum_{\delta''}\sum_{\{\alpha'\}}\sum_{\gamma'}\sum_{\delta'}<\gamma\delta|\mathcal{R}|\gamma''\delta''><\gamma''\{\alpha\}|\mathcal{T}|\gamma'\{\alpha'\}> \\
&\quad\times<\delta''\{\alpha'\}|\mathcal{T}'|\delta'\{\beta\}><\gamma'\delta'|\mathcal{R}^{-1}|\gamma'''\delta'''>
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

両辺の(γ部分について)traceをとると

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}\ \text{右辺}&=\sum_{\gamma}\sum_{\delta}<\gamma\{\alpha\}|\mathcal{T}'|\gamma\{\alpha'\}><\delta\{\alpha'\}|\mathcal{T}|\delta\{\beta\}> \\
&=\sum_{\{\alpha'\}}<\{\alpha\}|T'|\{\alpha'\}><\{\alpha'\}|T|\{\beta\}>
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}\ \text{左辺}&=\sum_{\gamma}\sum_{\delta}\sum_{\gamma''}\sum_{\delta''}\sum_{\{\alpha'\}}\sum_{\delta'}\sum_{\gamma'}<\gamma\delta|\mathcal{R}|\gamma''\delta''><\gamma''\{\alpha\}|\mathcal{T}|\gamma'\{\alpha'\}> \\
&\quad\times<\delta''\{\alpha'\}|\mathcal{T}'|\delta'\{\beta\}><\gamma'\delta'|\mathcal{R}^{-1}|\gamma\delta>
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{\gamma''}\sum_{\delta''}\sum_{\{\alpha'\}}\sum_{\gamma'}\sum_{\delta'} \langle \gamma'|\gamma''\rangle \langle \delta'|\delta''\rangle \langle \gamma''\{\alpha\}|\mathcal{T}|\gamma'\{\alpha'\}\rangle$$

$$\times \langle \delta''\{\alpha'\}|\mathcal{T}'|\delta'\{\beta\}\rangle$$

$$= \sum_{\gamma'}\sum_{\delta'}\sum_{\{\alpha'\}} \langle \gamma'\{\alpha\}|\mathcal{T}|\gamma'\{\alpha'\}\rangle \langle \delta'\{\alpha'\}|\mathcal{T}'|\delta'\{\beta\}\rangle$$

$$= \sum_{\{\alpha'\}} \langle \{\alpha\}|T|\{\alpha'\}\rangle \langle \{\alpha'\}|T'|\{\beta\}\rangle \tag{3.22}$$

すなわち

$$\mathcal{R}(\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}') = (\mathcal{T}'\otimes\mathcal{T})\,\mathcal{R} \tag{3.22}$$

であるような4行4列の行列$\mathcal{R}$が存在すれば

$$TT' = T'T \tag{3.23}$$

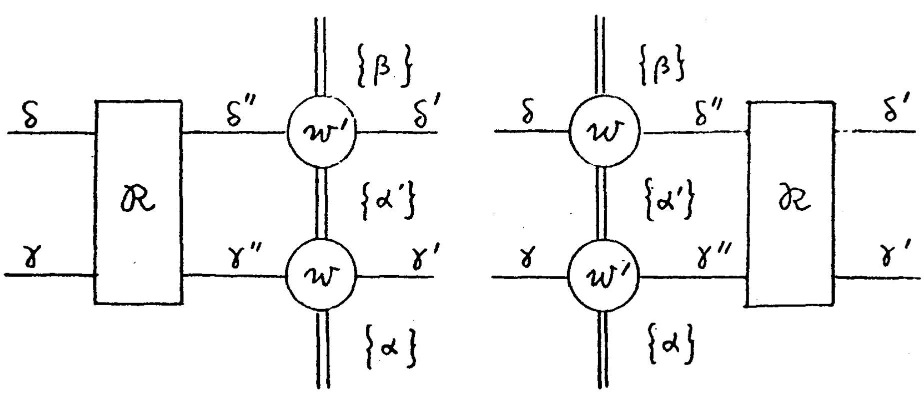
である。(3.16), (3.17)の直積，内積の関係をschematicに図示するとFig. 6 のようになる。縦bondが2重線になっているのは横方向の和がとってあることを示す。(3.22)が成立つためには

$$\mathcal{R}(\mathcal{L}_n\otimes\mathcal{L}_n') = (\mathcal{L}_n'\otimes\mathcal{L}_n)\,\mathcal{R} \tag{3.24}$$

が成立てばよい。何故なら

$$\prod_{n=1}^{N}\mathcal{A}_n \otimes \prod_{n=1}^{N}\mathcal{B}_n = \prod_{n=1}^{N}\mathcal{A}_n\otimes\mathcal{B}_n \tag{3.25}$$

であるから。(3.24)をYang-Baxterの関係式といい量子逆散乱法の種々の問題にあらわれる重要な関係式である。与えられた系においてw_jの組が与えられており，これにより$T_N(w_j)$が定まるが，仮想的なw_j'の組をもつ$T_N'(w_j')$を考えて$T_N(w_j)$と$T_N'(w_j')$が可換になるよう補助量$\mathcal{R}$を定める。$\mathcal{R}$は後に定めるw_j''の組の関数となりw_j，w_j'，w_j''は共通のパラメーターでパラメタライズされる。



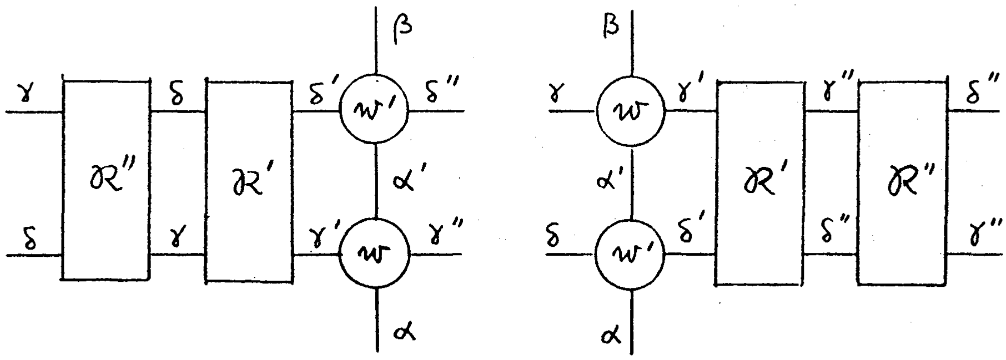
(3.16)　　(3.17)

Fig. 6

すなわち w_1, w_2, w_3, w_4 は l, η, λ の関数として w_1', w_2', w_3', w_4' は l, η, μ の関数として, w_1'' w_2'' w_3'' w_4'' は l, η, $\lambda-\mu$ の関数として定まる((5.42), (5.45)参照)。T_N (w_1, w_2, w_3, w_4) $=\mathrm{T_N}(\lambda)$ を2行2列の行列

$$T_N(\lambda)=\begin{bmatrix} A_N(\lambda) & B_N(\lambda) \\ C_N(\lambda) & D_N(\lambda) \end{bmatrix}$$

で表わしたとき((6.11)参照) $T_N(\lambda)$ と $T_N(\mu)$ の可換なことより $A_N(\lambda)$, $B_N(\lambda)$, … と $A_N(\mu)$, $B_N(\mu)$ … の交換関係が導かれる。$\Psi=\prod_l B(\lambda_l)\,\Omega$ (Ω は真空)とおいて Ψ が $T_N(\lambda)$ の固有ベクトルとなるように λ_l (の組)を定めると $T_N(\lambda)$ の固有値が求まるというのが次節以下のプログラムである。



(4.18) (4.19)

Fig. 7

§4. Baxterのparametrization

(3.24)をみたす $\mathscr{R}$ を求めよう。

$\mathscr{L}_n$, $\mathscr{L}_n'$ およびその直積の行列要素を書くと

$$<\gamma'\alpha|\mathscr{L}_{\mathbf{n}}|\gamma''\alpha'>=\sum w_j\,\sigma^j_{\gamma'\delta''}\,\sigma^j_{\mathbf{n}\alpha\alpha'} \tag{4.1}$$

$$<\delta'\alpha'|\mathscr{L}_{\mathbf{n}}'|\delta''\beta>=\sum w_k'\,\sigma^k_{\delta'\delta''}\,\sigma^k_{\mathbf{n}\alpha'\beta} \tag{4.2}$$

$$<\gamma'\delta'\alpha|\mathscr{L}_{\mathbf{n}}\otimes\mathscr{L}_{\mathbf{n}}'|\gamma''\delta''\beta>$$

$$=\sum_{\gamma}<\gamma'\alpha|\mathscr{L}_{\mathbf{n}}|\gamma''\alpha'><\delta'\alpha'|\mathscr{L}_{\mathbf{n}}'|\delta''\beta>$$

$$=\sum_j\sum_k w_j w_k'\,\sigma^j_{\gamma'\gamma''}\,\sigma^k_{\delta'\delta''}\,(\sigma^j_{\mathbf{n}}\sigma^k_{\mathbf{n}})_{\alpha\beta} \tag{4.3}$$

$$<\delta\alpha|\mathscr{L}_{\mathbf{n}}'|\delta'\alpha'>=\sum w_k'\,\sigma^k_{\delta\delta'}\,\sigma^k_{\mathbf{n}\alpha\alpha'} \tag{4.4}$$

$$\langle \delta \gamma \alpha | \mathscr{L}'_{\mathrm{n}} \otimes \mathscr{L}_{\mathrm{n}} | \delta' \gamma' \beta \rangle$$

$$= \sum_{\gamma} \langle \delta \alpha | \mathscr{L}'_{\mathrm{n}} | \delta' \alpha' \rangle \langle \gamma \alpha' | \mathscr{L}_{\mathrm{n}} | \gamma' \beta \rangle$$

$$= \sum_{j} \sum_{k} w_j w_k' \sigma^j_{\gamma\gamma'} \sigma^k_{\delta\delta'} \ (\sigma^k_{\mathrm{n}} \sigma^j_{\mathrm{n}})_{\alpha\beta} \qquad (4.6)$$

いま$\mathscr{R}'$を(4.7)で定義すると

$$\langle \gamma \delta | \mathscr{R}' | \gamma' \delta' \rangle = \sum x_l \sigma^l_{\gamma\gamma'} \ \sigma^l_{\delta\delta'} \qquad (4.7)$$

$$\langle \gamma \delta \alpha | \mathscr{R}' (\mathscr{L}_{\mathrm{n}} \otimes \mathscr{L}'_{\mathrm{n}}) | \gamma'' \delta'' \beta \rangle$$

$$= \sum_{\lambda'} \sum_{\mu'} \langle \gamma \delta | \mathscr{R}' | \gamma' \delta' \rangle \langle \gamma' \delta' \alpha | \mathscr{L}_{\mathrm{n}} \otimes \mathscr{L}'_{\mathrm{n}} | \gamma'' \delta'' \beta \rangle$$

$$= \sum_{j} \sum_{k} \sum_{l} w_j w_k' x_l \, (\sigma^l \sigma^j)_{\gamma\gamma'} \, (\sigma^l \sigma^k)_{\delta\delta'} \, (\sigma^j_{\mathrm{n}} \sigma^k_{\mathrm{n}})_{\alpha\beta} \qquad (4.8)$$

$$\langle \delta' \gamma' | \mathscr{R}' | \delta'' \gamma'' \rangle = \sum x_l \sigma^l_{\delta'\delta''} \ \sigma^l_{\gamma'\gamma''} \qquad (4.9)$$

$$\langle \delta \gamma' \alpha | (\mathscr{L}'_n \otimes \mathscr{L}_n) R' | \delta'' \gamma'' \beta \rangle$$

$$= \sum_{\lambda'} \sum_{\mu'} \langle \delta \gamma \alpha | \mathscr{L}'_{\mathrm{n}} \otimes \mathscr{L}_{\mathrm{n}} | \delta' \gamma' \beta \rangle \langle \delta' \gamma' | \mathscr{R}' | \delta'' \gamma'' \rangle$$

$$= \sum_{j} \sum_{k} \sum_{l} w_j w_k' x_l \, (\sigma^j \sigma^l)_{\gamma\gamma''} \, (\sigma^k \sigma^l)_{\delta\delta''} \, (\sigma^k_{\mathrm{n}} \sigma^j_{\mathrm{n}})_{\alpha\beta} \qquad (4.10)$$

次式で定義される$\mathscr{R}''$を考える。

$$\mathscr{R}'' = \frac{1}{2} \sum_{j} \sigma^j \otimes \sigma^j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.11)$$

$$\langle \gamma \delta | \mathscr{R}'' | \gamma' \delta' \rangle = \frac{1}{2} \sum \sigma^j_{\gamma\gamma'} \sigma^j_{\delta\delta'} \qquad (4.12)$$

これを

$$\langle \gamma \delta | A \otimes B | \gamma' \delta' \rangle = A_{\gamma\gamma'} B_{\delta\delta'} \qquad (4.13)$$

の左または右から作用させると列または行の添字の順序を反対にする効果をもつ。

$$\begin{array}{cc|cccc}
 & \gamma' & 1 & 1 & 2 & 2 \\
 & \delta' & 1 & 2 & 1 & 2 \\
\gamma & \gamma' & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & & & & \\
2 & 1 & & & & \\
2 & 2 & & & &
\end{array}
\begin{bmatrix}
a_{11} b_{11} & a_{11} b_{12} & a_{12} b_{11} & a_{12} b_{12} \\
a_{11} b_{21} & a_{11} b_{22} & a_{12} b_{21} & a_{12} b_{22} \\
a_{21} b_{11} & a_{21} b_{12} & a_{22} b_{11} & a_{22} b_{12} \\
a_{21} b_{21} & a_{21} b_{22} & a_{22} b_{21} & a_{22} b_{22}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

$$
= \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \gamma'\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ \delta'\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \\
\begin{array}{cc} \gamma & \delta \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{12}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}
\end{array} \qquad (4.14)
$$

$$
\sum_{\gamma'}\sum_{\delta'} < \gamma\delta \,|\, A \otimes B \,|\, \gamma'\delta' > < \gamma'\delta' \,|\, \mathcal{R}'' \,|\, \gamma''\delta'' >
$$

$$
= < \gamma\delta \,|\, A \otimes B \,|\, \delta''\gamma'' > \qquad (4.15)
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \gamma'\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ \delta'\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \\
\begin{array}{cc} \gamma & \delta \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}
\end{array} \qquad (4.16)
$$

$$
\sum_{\gamma'}\sum_{\delta'} < \gamma\delta \,|\, \mathcal{R}'' \,|\, \gamma'\delta' > < \gamma'\delta' \,|\, A \otimes B \,|\, \gamma''\delta'' >
$$

$$
= < \delta\gamma \,|\, A \otimes B \,|\, \gamma''\delta'' > \qquad (4.17)
$$

$$
\sum_{\gamma'}\sum_{\delta'} < \gamma\delta \,|\, \mathcal{R}'' \,|\, \gamma'\delta' > < \gamma'\delta'\alpha \,|\, \mathcal{R}'(\mathcal{L}_{\mathrm{n}} \otimes \mathcal{L}'_{\mathrm{n}}) \,|\, \gamma''\delta''\beta >
$$

$$
= < \gamma\delta\alpha \,|\, \mathcal{R}''\mathcal{R}'(\mathcal{L}_{\mathrm{n}} \otimes \mathcal{L}'_{\mathrm{n}}) \,|\, \gamma''\delta''\beta >
$$

$$
= \sum\sum\sum w_j w'_k x_j (\sigma^l \sigma^j)_{\gamma\gamma''} (\sigma^l \sigma^k)_{\delta\delta''} (\sigma^j_{\mathrm{n}} \sigma^k_{\mathrm{n}})_{\alpha\beta} \qquad (4.18)
$$

$$
\sum_{\mu'}\sum_{\lambda'} < \delta\gamma\alpha \,|\, (\mathcal{L}'_{\mathrm{n}} \otimes \mathcal{L}_{\mathrm{n}})\mathcal{R}' \,|\, \delta'\gamma'\beta > < \delta'\gamma' \,|\, \mathcal{R}'' \,|\, \delta''\gamma'' >
$$

$$
= < \delta\gamma\alpha \,|\, (\mathcal{L}'_{\mathrm{n}} \otimes \mathcal{L}_{\mathrm{n}})\mathcal{R}'\mathcal{R}'' \,|\, \gamma''\delta''\beta >
$$

$$
= \sum\sum\sum w_j w'_k x_l (\sigma^j \sigma^l)_{\gamma\gamma''} (\sigma^k \sigma^l)_{\delta\delta''} (\sigma^k_{\mathrm{n}} \sigma^j_{\mathrm{n}})_{\alpha\beta} \qquad (4.19)
$$

ゆえに

$$\mathcal{R}=\mathcal{R}'\mathcal{R}''=\mathcal{R}''\mathcal{R}'=\frac{1}{2}\sum x_j\sigma^j\otimes\sigma^j\sum\sigma^l\otimes\sigma^l \tag{4.20}$$

$$=\frac{1}{2}\sum\sum x_j\sigma^j_{\gamma\gamma'}\sigma^l_{\gamma'\gamma''}\sigma^j_{\delta\delta'}\sigma^l_{\delta'\delta''}$$

$$=\begin{bmatrix} x_4+x_3 & 0 & 0 & x_1-x_2 \\ 0 & x_4-x_3 & x_1+x_2 & 0 \\ 0 & x_1+x_2 & x_4-x_3 & 0 \\ x_1-x_2 & 0 & 0 & x_4+x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} x_4+x_3 & 0 & 0 & x_1-x_2 \\ 0 & x_1+x_2 & x_4-x_3 & 0 \\ 0 & x_4-x_3 & x_1+x_2 & 0 \\ x_1-x_2 & 0 & 0 & x_4+x_3 \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

を求める$\mathcal{R}$の形とし，(4.18)=(4.19)となるようx_jを定めよう。(4.18)と(4.19)をschematicに図示するとFig. 7のようになる。

§5. x_jのパラメータ表示

(4.18)−(4.19)＝0となる条件を求める。$\sum\sum\sum$の中の各項をしらべる。

$j=k$のとき

$$(\sigma^k_{\mathbf{n}}\sigma^j_{\mathbf{n}})_{\alpha\beta}=(\sigma^j_{\mathbf{n}}\sigma^k_{\mathbf{n}})_{\alpha\beta}$$

$$\sum_l w_j w_j'(\sigma^j_{\mathbf{n}}\sigma^j_{\mathbf{n}})_{\alpha\beta}x_i$$

$$\times[(\sigma^l\sigma^j)_{\gamma\gamma'}(\sigma^l\sigma^j)_{\delta\delta''}-(\sigma^j\sigma^l)_{\gamma\gamma''}(\sigma^j\sigma^l)_{\delta\delta''}] \tag{5.1}$$

$l, j\in(1, 2, 3)$で$l\neq j$ならば$\sigma^l\sigma^j=-\sigma^j\sigma^l$で消える。$l=4$，$j\in(1, 2, 3, 4)$および$j=4$，$l\in(1, 2, 3, 4)$のとき$\sigma^l\sigma^j=\sigma^j\sigma^l$で消える。ゆえに$j=k$の項はすべて消える。

$j\neq k$，j，$k\in(1, 2, 3)$のとき

$$\sum w_j w_k'(\sigma^j_{\mathbf{n}}\sigma^k_{\mathbf{n}})_{\alpha\beta}x_l$$

$$\times[(\sigma^l\sigma^j)_{\gamma\gamma'}(\sigma^l\sigma^k)_{\delta\delta''}+(\sigma^j\sigma^l)_{\gamma\gamma''}(\sigma^k\sigma^l)_{\delta\delta''}] \tag{5.2}$$

$l=j\neq k\qquad(\sigma^l\sigma^j)_{\gamma\gamma''}=(\sigma^j\sigma^l)_{\delta\delta''}$

$$(\sigma^l\sigma^k)_{\gamma\gamma''}=-(\sigma^k\sigma^l)_{\delta\delta''}$$

で消える。$l=k\neq j$ の場合も同様である。$l\neq k\neq j\neq l$ の場合は消えない。このとき[ ]内は第1項の2倍となる。

$j\neq k$, $j=4$ のとき

$$\begin{aligned}&\sum w_4 w'_k(\sigma_{\mathrm{n}}^4\sigma_{\mathrm{n}}^l)_{\alpha\beta}x_l\\&\times[\sigma^l_{\gamma\gamma''}(\sigma^l\sigma^k)_{\delta\delta''}-\sigma^l_{\gamma\gamma''}(\sigma^k\sigma^l)_{\delta\delta''}\end{aligned}\tag{5.3}$$

$l=4$ または $l=k$ のとき消える。$k\neq l$, k, $l\in(1,2,3)$ のときは消えない。このとき[ ]内は第1項の2倍となる。$j\neq k$, $k=4$ のときも同様。

残った項を書くと

$$\begin{aligned}
&=2\{w_1w'_2(i\sigma_{\mathrm{n}}^3)_{\alpha\beta}[x_3\sigma^2_{\gamma\gamma''}\sigma^1_{\delta\delta''}+x_4\sigma^1_{\gamma\gamma''}\sigma^2_{\delta\delta''}]\\
&+w_1w'_3(-i\sigma_{\mathrm{n}}^2)_{\alpha\beta}[x_2\sigma^3_{\gamma\gamma''}\sigma^1_{\delta\delta''}+x_4\sigma^1_{\gamma\gamma''}\sigma^3_{\delta\delta''}]\\
&+w_1w'_4\sigma^1_{\mathrm{n}\alpha\beta}[x_2(-i\sigma^3_{\gamma\gamma''})\sigma^2_{\delta\delta''}+x_3\sigma^2_{\gamma\gamma''}\sigma^3_{\delta\delta''}]\\
&+w_2w'_1(-i\sigma_{\mathrm{n}}^3)_{\alpha\beta}[x_3\sigma^1_{\gamma\gamma''}\sigma^2_{\delta\delta''}+x_4\sigma^2_{\gamma\gamma''}\sigma^1_{\delta\delta''}]\\
&+w_2w'_3(i\sigma_{\mathrm{n}}^1)_{\alpha\beta}[x_1\sigma^3_{\gamma\gamma''}\sigma^2_{\delta\delta''}+x_4\sigma^2_{\gamma\gamma''}\sigma^3_{\delta\delta''}]\\
&+w_2w'_4(\sigma_{\mathrm{n}}^2)_{\alpha\beta}[x_1i\sigma^3_{\gamma\gamma''}\sigma^1_{\delta\delta''}+x_3(-i\sigma^1_{\gamma\gamma''})\sigma^3_{\delta\delta''}]\\
&+w_3w'_1(i\sigma_{\mathrm{n}}^2)_{\alpha\beta}[x_2\sigma^1_{\gamma\gamma''}\sigma^3_{\delta\delta''}+x_4\sigma^3_{\gamma\gamma''}\sigma^1_{\delta\delta''}]\\
&+w_3w'_2(-i\sigma_{\mathrm{n}}^1)_{\alpha\beta}[x_1\sigma^2_{\gamma\gamma''}\sigma^3_{\delta\delta''}+x_4\sigma^3_{\gamma\gamma''}\sigma^2_{\delta\delta''}]\\
&+w_3w'_4(\sigma_{\mathrm{n}}^3)_{\alpha\beta}[x_1(-i\sigma^2_{\gamma\gamma''})\sigma^1_{\delta\delta''}+x_2i\sigma^1_{\gamma\gamma''}\sigma^2_{\delta\delta''}]\\
&+w_4w'_1(\sigma_{\mathrm{n}}^1)_{\alpha\beta}[x_2\sigma^2_{\gamma\gamma''}(-i\sigma^3)_{\delta\delta''}+x_3\sigma^3_{\gamma\gamma''}i\sigma^2_{\delta\delta''}]\\
&+w_4w'_2(\sigma_{\mathrm{n}}^2)_{\alpha\beta}[x_1\sigma^1_{\gamma\gamma''}i\sigma^3_{\delta\delta''}+x_3\sigma^3_{\gamma\gamma''}(-i\sigma^1)_{\delta\delta''}]\\
&+w_4w'_3(\sigma_{\mathrm{n}}^3)_{\alpha\beta}[x_1\sigma^1_{\gamma\gamma''}(-i\sigma^2)_{\delta\delta''}+x_2\sigma^2_{\gamma\gamma''}i\sigma^1_{\delta\delta''}]\}
\end{aligned}\tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
&=2\{\sigma^3_{\mathrm{n}\alpha\beta}i\sigma^2_{\gamma\gamma''}\sigma^1_{\delta\delta''}[w_1w'_2x_3-w_2w'_1x_4-w_3w'_4x_1+w_4w'_3x_2]\\
&+\sigma^3_{\mathrm{n}\alpha\beta}\sigma^1_{\gamma\gamma''}i\sigma^2_{\delta\delta''}[-w_1w'_2x_4-w_2w'_1x_3+w_3w'_4x_2-w_4w'_3x_1]\\
&+i\sigma^2_{\mathrm{n}\alpha\beta}\sigma^3_{\gamma\gamma''}\sigma^1_{\delta\delta''}[-w_1w'_3x_2+w_2w'_4x_1+w_3w'_1x_4-w_4w'_2x_3]
\end{aligned}$$

$$+ i\sigma^2_{n\alpha\beta}\sigma^1_{\gamma\gamma''}\sigma^3_{\delta\delta''}[-w_1w_3'x_4-w_2w_4'x_3+w_3w_1'x_2+w_4w_2'x_1]$$

$$+\sigma^1_{n\alpha\beta}\sigma^3_{\gamma\gamma''}i\sigma^2_{\delta\delta''}[-w_1w_4'x_2+w_2w_3'x_1-w_3w_2'x_4+w_4w_1'x_3]$$

$$+\sigma^1_{n\alpha\beta}i\sigma^2_{\gamma\gamma''}\sigma^3_{\delta\delta''}[w_1w_4'x_3+w_2w_3'x_4-w_3w_2'x_1-w_4w_1'x_2]\} \tag{5.4'}$$

(5.4′)が＝0である為には[　]＝0．すなわち

$$w_nw_i'x_j-w_lw_n'x_k+w_kw_j'x_l-w_jw_k'x_n=0 \tag{5.5}$$

が(l, k, j, n)が(1, 2, 3, 4)のすべての置換について成立てばよい。以下x_jをw_j''と記す。

$$w_nw_l'w_j''-w_lw_n'w_k''+w_kw_j'w_l''-w_jw_k'w_n''=0 \tag{5.6}$$

$w_nw_l'w_k''$を$(n\ l\ j)$と略記する。$j\ k\ l\ n$を 1 2 3 4, 1 2 4 3, 1 3 4 2, 1 3 2 4, 1 4 2 3, 1 4 3 2の6通りにとったとき上式は次の(5.7)－(5.12) のようになる。

w_i, w_j', w_l''等を$ij'k''$等と略記する。

$$1\,2\,4\,3 \quad 34'1''-43'2''-12'3''+21'4''=0 \tag{5.7}$$

$$1\,2\,3\,4 \quad 43'1''-34'2''+21'3''-12'4''=0 \tag{5.8}$$

$$1\,4\,3\,2 \quad 23'1''-14'2''+41'3''-32'4''=0 \tag{5.9}$$

$$1\,4\,2\,3 \quad 32'1''+41'2''-14'3''-23'4''=0 \tag{5.10}$$

$$1\,3\,4\,2 \quad 24'1''-13'2''-42'3''+31'4''=0 \tag{5.11}$$

$$1\,3\,2\,4 \quad 42'1''+31'2''-24'3''-13'4''=0 \tag{5.12}$$

(5.7)と(5.8)，(5.9)と(5.10)，(5.11)と(5.12)が組になっている。w'とw''について対称である（例えば(5.7)でw'とw''を交換すると(5.11)になる）がwとw'については対称でないことに注意しておく。(5.7)から(5.10)までをw''についての方程式とみて≡0でない解をもつ条件として，その行列式＝0を計算すると（4つのえらび方を勝手にとると(5.18)の結果が得られないことがある）

$$D=\begin{vmatrix} 34' & -43' & -12' & 21' \\ 43' & -34' & 21' & -12' \\ 23' & -14' & 41' & -32' \\ 32' & 41' & -14' & -23' \end{vmatrix}$$

$$
=34'\begin{vmatrix} -34' & 21' & -12' \\ -14' & 41' & -32' \\ 41' & -14' & -23' \end{vmatrix} +43'\begin{vmatrix} 43' & 21' & -12' \\ 23' & 41' & -32' \\ 32' & -14' & -23' \end{vmatrix}
$$

$$
-12'\begin{vmatrix} 43' & -34' & -12' \\ 23' & -14' & -32' \\ 32' & 41' & -23' \end{vmatrix} -21'\begin{vmatrix} 43' & -34' & 21' \\ 23' & -14' & 41' \\ 32' & 41' & -14' \end{vmatrix}
$$

$$
=-3^2 4'^2 \begin{vmatrix} 41' & -32' \\ -14' & -23' \end{vmatrix} -1'234' \begin{vmatrix} -14' & -32' \\ 41' & -23' \end{vmatrix} -12'34' \begin{vmatrix} -14' & 41' \\ 41' & -14' \end{vmatrix}
$$

$$
+3'^2 4^2 \begin{vmatrix} 41' & -32' \\ -14' & -23' \end{vmatrix} -1'23'4 \begin{vmatrix} 23' & -32' \\ 32' & -23' \end{vmatrix} -12'3'4 \begin{vmatrix} 23' & 41' \\ 32' & -14' \end{vmatrix}
$$

$$
-12'3'4 \begin{vmatrix} -14' & -32' \\ 41' & -23' \end{vmatrix} -12'34' \begin{vmatrix} 23' & -32' \\ 32' & -23' \end{vmatrix} +1^2 2'^2 \begin{vmatrix} 23' & -14' \\ 32' & 41' \end{vmatrix}
$$

$$
-1'23'4 \begin{vmatrix} -14' & 41' \\ 41' & -14' \end{vmatrix} -1'234' \begin{vmatrix} 23' & 41' \\ 32' & -14' \end{vmatrix} -1'^2 2^2 \begin{vmatrix} 23' & -14' \\ 32' & 41' \end{vmatrix}
$$

第2, 11項の和，第6, 7項の和は消える。第9, 12項，第1, 4項，第3, 8項，第5, 10項の和をまとめて，

$$
\begin{aligned}
D=&(1^2 2'^2-1'^2 2^2)(1'23'4+12'34') \\
&-(3^2 4'^2-3'^2 4^2)(-1'23'4-12'34') \\
&-12'34'(1^2 4'^2-1'^2 4^2-2^2 3'^2+2'^2 3^2) \\
&-1'23'4(-2^2 3'^2+2'^2 3^2+1^2 4'^2-1'^2 4^2) \\
=&(1'23'4+12'34')(1^2 2'^2-1'^2 2^2+3^2 4'^2-3'^2 4^2 \\
&-1^2 4'^2+1'^2 4^2+2^2 3'^2-2'^2 3^2) \\
=&(1'23'4+12'34')[(1^2-3^2)(2'^2-4'^2)-(1'^2-3'^2)(2^2-4^2)] \qquad (5.13)
\end{aligned}
$$

(5.13) = 0 より

$$
\frac{w_1^2-w_3^2}{w_2^2-w_4^2}=\frac{w_1'^2-w_3'^2}{w_2'^2-w_4'^2}
$$

$(jkln)$ の置換をとって

$$\frac{w_j^2 - w_k^2}{w_l^2 - w_n^2} = \frac{w_j'^2 - w_k'^2}{w_l'^2 - w_n'^2} \tag{5.18}$$

が成立つ。(5.18)が成立つためには

$$\begin{aligned} w_j^2 &= p(u - u_j) \\ w_j'^2 &= p'(u' - u_j) \end{aligned} \tag{5.19}$$

が成立てばよい。(5.6)より

$$\frac{w_j''^2 - w_k''^2}{w_l''^2 - w_n''^2} = \frac{w_j^2 - w_k^2}{w_l^2 - w_n^2}$$

も成立つから

$$w_j''^2 = p''(u'' - u_j) \tag{5.20}$$

も成立つ。

(5.7)+(5.8)に(5.19)と(5.20)をいれたものをFとおく*。

$$\begin{aligned} F = {} & [(u-u_4)^{1/2}(u'-u_3)^{1/2} + (u-u_3)^{1/2}(u'-u_4)^{1/2}] \\ & \times [(u''-u_1)^{1/2} - (u''-u_2)^{1/2}] \\ & + [(u-u_2)^{1/2}(u'-u_1)^{1/2} + (u-u_1)^{1/2}(u'-u_2)^{1/2}] \\ & \times [(u''-u_3)^{1/2} - (u''-u_4)^{1/2}] \end{aligned} \tag{5.21}$$

これを

$$F = (43' - 34')(1'' - 2'') + (21' - 12')(3'' - 4'') \tag{5.21'}$$

と略記する((5.7)−(5.11)と記号は同じだが内容は異なる。)

$$2\frac{\partial}{\partial u}(u-u_4)^{1/2}(u'-u_3)^{1/2} = (u-u_4)^{-1/2}(u'-u_3)^{1/2}$$

の右辺を$\frac{3'}{4}$と略記する。(5.21′)をuで偏微分すると

$$2\frac{\partial F}{\partial u} = \left(\frac{3'}{4} + \frac{4'}{3}\right)(1'' - 2'') + \left(\frac{1'}{2} - \frac{2'}{1}\right)(3'' - 4'')$$

* 以下(5.23)まで守田徹氏の方法による。

$$=(3''-4'')\left[\frac{33'+44'}{34}\ \frac{12'-21'}{43'+34'}+\frac{11'-22'}{21}\right]$$

同様に

$$2\frac{\partial F}{\partial u'}=\left(\frac{4}{3'}+\frac{3}{4'}\right)(1''-2'')+\left(\frac{2}{1'}-\frac{1}{2'}\right)(3''-4'')$$

$$=(3''-4'')\left[\frac{33'+44'}{3'4'}\ \frac{12'-21'}{43'+34'}+\frac{22'-11'}{1'2'}\right]$$

従って

$$\frac{\partial F}{\partial u}\Big/\frac{\partial F}{\partial u'}=\frac{1'2'3'4'}{1\,2\,3\,4}$$

$$\times\frac{(33'+44')(12'-1'2)\,12+(11'-22')\,34\,(43'+34')}{(33'+44')(12'-1'2)\,1'2'+(11'-22')\,3'4'\,(43'+34')}$$

$$=\frac{1'2'3'4'}{1\,2\,3\,4}$$

$$\times\frac{(33'+44')(1^2 22'-11'2^2)+(11'-22')(33'4^2+3^2 44')}{(33'+44')(11'2'^2-1'^2 22')+(22'-11')(3'^2 44'+33'4'^2)}$$

$$=\frac{1'2'3'4'}{1\,2\,3\,4}$$

$$\times\frac{22'33'(1^2-4^2)-33'11'(2^2-4^2)+44'22'(1^2-3^2)+44'11'(3^2-2^2)}{22'33'(4'^2-1'^2)-33'11'(4'^2-2'^2)+44'22'(3'^2-1'^2)+44'11'(2'^2-3'^2)}$$

$$1^2-4^2=(u-u_1)-(u-u_4)=(u_4-u_1)$$

$$1'^2-4'^2=(u'-u_1)-(u'-u_4)=(u_4-u_1)$$

等であるから

$$\frac{\partial F}{\partial u}\Big/\frac{\partial F}{\partial u'}=-\frac{1'2'3'4'}{1\,2\,3\,4}\tag{5.22}$$

$$\frac{\partial u''}{\partial u}=-\frac{\partial F/\partial u}{\partial F/\partial u''}$$

$$\frac{\partial u''}{\partial u'}=-\frac{\partial F/\partial u'}{\partial F/\partial u''}$$

であるから

$$\frac{1}{g(u)}\frac{\partial u''}{\partial u}+\frac{1}{g(u')}\frac{\partial u''}{\partial u'}=0\tag{5.23}$$

が成立つ。ここに

$$g(u) = \text{const}\ [(u-u_j)(u-u_k)(u-u_l)(u-u_n)]^{-1/2} \tag{5.23$'$}$$

である。

$$\frac{dv}{du} = g(u), \quad \frac{dv'}{du'} = g(u') \tag{5.24}$$

であるような新しい変数 v, v' を導入すると

$$v = \int \frac{du}{[(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)(u-u_4)]^{1/2}} \tag{5.25}$$

$u > u_4 > u_3 > u_2 > u_1$ とするとこの積分は第1種楕円積分で表わされる。(森口他, 数学公式 I, p. 147)

$$v = \frac{2}{[(u_4-u_2)(u_3-u_1)]^{1/2}} F(\varphi, l) \tag{5.26}$$

ここに

$$\varphi = \sin^{-1}\left[\frac{(u_3-u_1)(u-u_4)}{(u_4-u_1)(u-u_3)}\right]^{1/2} \tag{5.27}$$

$$l = \left[\frac{(u_3-u_2)(u_4-u_1)}{(u_4-u_2)(u_3-u_1)}\right]^{1/2} \tag{5.28}$$

$$\mathrm{sn}(v, l) = \sin\varphi = \sin \mathrm{am}(v, l)$$

であるから

$$\mathrm{sn}^2(v, l) = \sin^2\varphi = \frac{(u_3-u_1)(u-u_4)}{(u_4-u_1)(u-u_3)}$$

これから u を求めると

$$(u_4u - u_4u_3 - u_1u + u_1u_3)\,\mathrm{sn}^2(v, l)$$
$$= (u_3u - u_3u_4 - u_1u + u_1u_4)$$

$$u = \frac{u_4(u_3-u_1) - u_3(u_4-u_1)\,\mathrm{sn}^2(v, l)}{(u_3-u_1) - (u_4-u_1)\,\mathrm{sn}^2(v, l)} \tag{5.29}$$

ここで

$$\mathrm{sn}^2(\zeta, l) = \frac{u_1-u_3}{u_1-u_4} \tag{5.30}$$

となるようなパラメタ ζ を導入すると

$$u=\frac{u_4\,\mathrm{sn}^2(\zeta,l)-u_3\,\mathrm{sn}^2(v,l)}{\mathrm{sn}^2(\zeta,l)-\mathrm{sn}^2(v,l)} \tag{5.31}$$

$$\begin{aligned}
&w_1^2:w_2^2:w_3^2:w_4^2\\
&=(u-u_1):(u-u_2):(u-u_3):(u-u_4)\\
&=[(u_4-u_1)\,\mathrm{sn}^2(\zeta,l)-(u_3-u_1)\,\mathrm{sn}^2(v,l)]\\
&:[(u_4-u_2)\,\mathrm{sn}^2(\zeta,l)-(u_3-u_2)\,\mathrm{sn}^2(v,l)]\\
&:[(u_4-u_3)\,\mathrm{sn}^2(\zeta,l)]\\
&:[-(u_3-u_4)\,\mathrm{sn}^2(v,l)]\\
&=\left[\frac{u_4-u_1}{u_4-u_3}-\frac{u_3-u_1}{u_4-u_3}\,\frac{\mathrm{sn}^2(v,l)}{\mathrm{sn}^2(\zeta,l)}\right]\\
&:\left[\frac{u_4-u_2}{u_4-u_3}-\frac{u_3-u_2}{u_4-u_3}\,\frac{\mathrm{sn}^2(v,l)}{\mathrm{sn}^2(\zeta,l)}\right]\\
&:1:\frac{\mathrm{sn}^2(v,l)}{\mathrm{sn}^2(\zeta,l)}
\end{aligned} \tag{5.32}$$

右辺第1項

$$\begin{aligned}
&=\frac{(u_4-u_1)\,\mathrm{sn}^2(\zeta,l)-(u_3-u_1)\,\mathrm{sn}^2(v,l)}{(u_4-u_3)\,\mathrm{sn}^2(\zeta,l)}\\
&=\frac{\mathrm{sn}^2(\zeta,l)-\dfrac{u_3-u_1}{u_4-u_1}\,\mathrm{sn}^2(v,l)}{\dfrac{-u_3+u_1+u_4-u_1}{u_4-u_1}\,\mathrm{sn}^2(\zeta,l)}\\
&=\frac{\mathrm{sn}^2(\zeta,l)\,[1-\mathrm{sn}^2(v,l)]}{-\mathrm{sn}^4(\zeta,l)+\mathrm{sn}^2(\zeta,l)}\\
&=\frac{1-\mathrm{sn}^2(v,l)}{1-\mathrm{sn}^2(\zeta,l)}=\frac{\mathrm{cn}^2(v,l)}{\mathrm{cn}^2(\zeta,l)}
\end{aligned} \tag{5.33}$$

右辺第2項

$$\begin{aligned}
&=\frac{(u_4-u_2)\,\mathrm{sn}^2(\zeta,l)-(u_3-u_2)\,\mathrm{sn}^2(v,l)}{(u_4-u_3)\,\mathrm{sn}^2(\zeta,l)}\\
&=\frac{(u_4-u_2)\,\mathrm{sn}^2(\zeta,l)-(u_3-u_2)\,\mathrm{sn}^2(v,l)}{\mathrm{sn}^2(\zeta,l)\,[(u_4-u_2)-(u_3-u_2)]}
\end{aligned}$$

$$=\frac{(u_4-u_2)\dfrac{u_3-u_1}{u_4-u_1}-(u_3-u_2)\,\mathrm{sn}^2(v,\ l)}{(u_4-u_2)\dfrac{u_3-u_1}{u_4-u_1}-(u_3-u_2)\,\mathrm{sn}^2(\zeta,\ l)}$$

$$=\frac{1-\dfrac{u_3-u_2}{u_4-u_2}\dfrac{u_4-u_1}{u_3-u_1}\,\mathrm{sn}^2(v,\ l)}{1-\dfrac{u_3-u_2}{u_4-u_2}\dfrac{u_4-u_1}{u_3-u_1}\,\mathrm{sn}^2(\zeta,\ l)}$$

$$=\frac{1-l^2\mathrm{sn}^2(v,\ l)}{1-l^2\mathrm{sn}^2(\zeta,\ l)}=\frac{\mathrm{dn}^2(v,\ l)}{\mathrm{dn}^2(\zeta,\ l)} \tag{5.34}$$

故に

$$w_1:w_2:w_3:w_4=\frac{\mathrm{cn}(v,l)}{\mathrm{cn}(\zeta,l)}:\frac{\mathrm{dn}(v,l)}{\mathrm{dn}(\zeta,l)}:1:\frac{\mathrm{sn}(v,l)}{\mathrm{sn}(\zeta,l)} \tag{5.35}$$

これを8−vertex modelのBaxterのパラメタ表示という。6−vertex model の場合には3角関数であらわされる。lとζはu_1, u_2, u_3, u_4により，vはuにもよっている。ゆえに同じlとζをもち，異るvをもつ任意の二つのtransfer matricesは可換である。この関係はw_jに制限をつけるものではない。w_jが与えられたときパラメータl, ζ, vは次式により定まる。

$$l^2=\frac{(w_1^2-w_4^2)(w_2^2-w_3^2)}{(w_1^2-w_3^2)(w_2^2-w_4^2)} \tag{5.36}$$

$$\mathrm{sn}^2(\zeta,\ l)=\frac{w_1^2-w_3^2}{w_1^2-w_4^2} \tag{5.37}$$

$$\mathrm{sn}(\mathrm{v},\ l)=\frac{w_4}{w_3}\,\mathrm{sn}(\zeta,l) \tag{5.38}$$

(5.35)と同様に

$$w_1':w_2':w_3':w_4'=\frac{\mathrm{cn}(v',l)}{\mathrm{cn}(\zeta,l)}:\frac{\mathrm{dn}(v',l)}{\mathrm{dn}(\zeta,l)}:1:\frac{\mathrm{sn}(v',l)}{\mathrm{sn}(\zeta,l)} \tag{5.39}$$

が得られる。l, ζはw_jをきめるパラメーターと共通でvが異る。(5.35)と(5.39)を(5.6)に入れるとw_j''の比が

$$w_1'':w_2'':w_3'':w_4''$$
$$=\frac{\mathrm{cn}(v-v'+\zeta,l)}{\mathrm{cn}(\zeta,l)}:\frac{\mathrm{dn}(v-v'+\zeta,l)}{\mathrm{dn}(\zeta,l)}:1:\frac{\mathrm{sn}(v-v'+\zeta,l)}{\mathrm{sn}(\zeta,l)} \tag{5.40}$$

と求まる。(証明はAppendixにある)

(5.35), (5.40), に対して次のLanden変換

$$k=\frac{1-l}{1+l} \quad \eta=\frac{i\zeta}{1+k} \quad \lambda=\frac{iv}{1+k} \quad \mu=\frac{iv'}{1+k} \tag{5.41}$$

を行うと

$$\begin{aligned}&(w_4+w_3):(w_4-w_3):(w_1+w_2):(w_1-w_2)\\&=\mathrm{sn}(\lambda+\eta,k):\mathrm{sn}(\lambda-\eta,k):\mathrm{sn}(2\eta,k)\\&:k\,\mathrm{sn}(2\eta,k)\,\mathrm{sn}(\lambda-\eta,k)\,\mathrm{sn}(\lambda+\eta,k)\end{aligned} \tag{5.42}$$

w' の組に対して λ の代りに μ の入った(5.42)と同型の関係式が成立つ。w'' の組については

$$\begin{aligned}&(w''_4+w''_3):(w''_4-w''_3):(w''_1+w''_2):(w''_1-w''_2)\\&=\mathrm{sn}(\lambda-\mu+2\eta,k):\mathrm{sn}(\lambda-\mu,k):\mathrm{sn}(2\eta,k)\\&:k\,\mathrm{sn}(2\eta,k)\,\mathrm{sn}(\lambda-\mu,k)\,\mathrm{sn}(\lambda-\mu+2\eta,k)\end{aligned} \tag{5.43}$$

が得られる(証略)このパラメータ表示を用いると(k は省略して記す)

$$\mathscr{R}=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & d \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ d & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \tag{5.44}$$

$$\begin{aligned}a(\lambda,\mu)&=\mathrm{sn}(\lambda-\mu+2\eta)\\b(\lambda,\mu)&=\mathrm{sn}\,2\eta\\c(\lambda,\mu)&=\mathrm{sn}(\lambda-\mu)\\d(\lambda,\mu)&=k\,\mathrm{sn}\,2\eta\,\mathrm{sn}(\lambda-\mu)\,\mathrm{sn}(\lambda-\mu+2\eta)\end{aligned} \tag{5.45}$$

となる。

(5.25)以下で $u>u_4>u_3>u_2>u_1$ と仮定したことは

$$0\leq w_4<w_3<w_2<w_1 \tag{5.46}$$

を仮定することと同じである。この領域をbasic domainという。状態和 $Z(w_1, w_2, w_3, w_4)$ は(1, 2, 3, 4)のすべての置換(j, k, l, n)について

$$Z(w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4)=Z(\pm w_j, \pm w_k, \pm w_l, \pm w_n) \tag{5.47}$$

の対称性をもつので(5.46)の領域だけ求めればよいのである。(5.47)の証明は省略するが(3.15)より得られる

$$\sigma^1 \mathscr{L}_n(w_1, w_2, w_3, w_4)\sigma^1 = \mathscr{L}_n(w_1, -w_2, -w_3, w_4)$$
$$\sigma^2 \mathscr{L}_n(w_1, w_2, w_3, w_4)\sigma^2 = \mathscr{L}_n(-w_1, w_2, -w_3, w_4)$$
$$\sigma^3 \mathscr{L}_n(w_1, w_2, w_3, w_4)\sigma^3 = \mathscr{L}_n(-w_1, -w_2, w_3, w_4) \tag{5.48}$$

を用いて行うことが出来る。

温度によって w_j の大小関係は変りうるので与えられた w_1, w_2, w_3, w_4 が(5.46)をみたしていないときには w_j の名前または符号をつけかえてから以下に進めばよい。温度をかえたときある温度で $w_2 = w_3$ となり，その温度の上，下でもとの w_2, w_3 の大きさの順序が反転する温度が臨界温度 T_C を与える。

§6. 6-vertex model

以下 Baxter の parametrization を 6−vertex model の場合に適用し，$T(\lambda)$の固有値および固有ベクトルを求める。このとき

$$\begin{aligned}
&v_7 = v_8 = 0\\
&w_1 = w_2\\
&l^2 = 1 \quad l = 1\\
&k = 0 \quad \eta = i\zeta \quad \lambda = iv\\
&\mathrm{sn}(u, 0) = \sin u, \quad \mathrm{sn}(u, 1) = \mathrm{th}\, u.\\
&\mathrm{cn}(u, 0) = \cos u, \quad \mathrm{dn}(u, 0) = 1\\
&\mathrm{cn}(u, 1) = (1 - \mathrm{th}^2 u)^{1/2}
\end{aligned} \tag{6.1}$$

である。KDPモデル，Fモデル，Sutherlandモデル，Wuモデルはzero field 6−vertexモデルの特別の場合である。

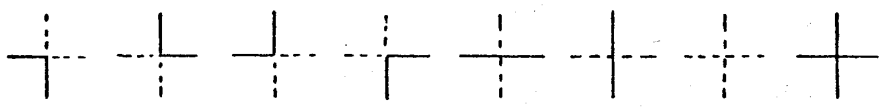
(5.42)は

$$\begin{aligned}
&(w_4 + w_3) : (w_4 - w_3) : (w_1 + w_2) : (w_1 - w_2)\\
&= \sin(\lambda + \eta) : \sin(\lambda - \eta) : \sin 2\eta : 0
\end{aligned} \tag{6.2}$$

w' に対しては(6.2)の λ の代りに μ の入った式が成立つ。

$$\begin{aligned}
&(w''_4 + w''_3) : (w''_4 - w''_3) : (w''_1 + w''_2) : (w''_1 - w''_2)\\
&= \sin(\lambda - \mu + 2\eta) : \sin(\lambda - \mu) : \sin 2\eta : 0
\end{aligned} \tag{6.3}$$

となる。また，



	1	2	3	4	5	6	7	8
KDP	0	0	ε	ε	ε	ε	∞	∞
F	ε	ε	ε	ε	0	0	∞	∞
Sutherland	$-\frac{\delta}{2}$	$-\frac{\delta}{2}$	$\frac{\delta}{2}$	$\frac{\delta}{2}$	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	∞	∞
Wu	0	∞	ε	ε	ε	ε	∞	∞

Fig. 8

$$\mathscr{R}(\lambda,\ \mu)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

$$b=b(\lambda,\ \mu)=\frac{\sin\ 2\eta}{\sin(\lambda-\mu+2\eta)} \tag{6.5}$$

$$c=c(\lambda,\ \mu)=\frac{\sin(\lambda-\mu)}{\sin(\lambda-\mu+2\eta)} \tag{6.6}$$

$$\frac{b(\lambda,\ \mu)}{c(\lambda,\ \mu)}=-\frac{b(\mu,\ \lambda)}{c(\mu,\ \lambda)} \tag{6.7}$$

であることに注意しておく。

$$\mathscr{L}_{\mathrm{n}}(\lambda)=\begin{bmatrix} w_4\sigma^4_{\mathrm{n}}+w_3\sigma^3_{\mathrm{n}} & w_1(\sigma^1_{\mathrm{n}}-i\sigma^2_{\mathrm{n}}) \\ w_1(\sigma^2_{\mathrm{n}}+i\sigma^2_{\mathrm{n}}) & w_4\sigma^4_{\mathrm{n}}-w_3\sigma^3_{\mathrm{n}} \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

$$=\begin{bmatrix} \alpha_{\mathrm{n}} & \beta_{\mathrm{n}} \\ \gamma_{\mathrm{n}} & \delta_{\mathrm{n}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} w_4+w_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_4-w_3 & w_1+w_2 & 0 \\ 0 & w_1+w_2 & w_4-w_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_4+w_3 \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

$$\alpha_{\mathrm{n}}=\begin{bmatrix} w_4+w_3 & 0 \\ 0 & w_4-w_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sin(\lambda+\eta) & 0 \\ 0 & \sin(\lambda-\eta) \end{bmatrix}$$

$$\beta_{\mathrm{n}}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ w_1+w_2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \sin 2\eta & 0\end{bmatrix}$$

$$\gamma_{\mathrm{n}}=\begin{bmatrix}0 & w_1+w_2\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \sin 2\eta\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\delta_{\mathrm{n}}=\begin{bmatrix}w_4-w_3 & 0\\ 0 & w_4+w_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin(\lambda-\eta) & 0\\ 0 & \sin(\lambda+\eta)\end{bmatrix} \tag{6.10}$$

である。

また

$$\mathcal{T}_N(\lambda)\equiv\prod_{n=1}^{N}\mathcal{L}_n(\lambda) \tag{6.11}$$

$$=\begin{bmatrix}A_N(\lambda) & B_N(\lambda)\\ C_N(\lambda) & D_N(\lambda)\end{bmatrix} \tag{6.11'}$$

$$T_N(\lambda)=\mathrm{tr}\,\mathcal{T}_N(\lambda)=A_N(\lambda)+D_N(\lambda) \tag{6.12}$$

である。$A_N(\lambda)\cdots D_N(\lambda)$ は $2^N\times 2^N$ の行列である。以下 N は省略する。$\mathcal{R}(\lambda,\mu)$ は前節までより

$$\mathcal{R}(\lambda,\mu)(\mathcal{T}(\lambda)\otimes\mathcal{T}(\mu))=(\mathcal{T}(\mu)\otimes\mathcal{T}(\lambda))\,\mathcal{R}(\lambda,\mu) \tag{6.13}$$

をみたすように定められている。(6.13) を計算すると

$$\mathcal{T}(\lambda)\otimes\mathcal{T}(\mu)=\begin{bmatrix}A(\lambda) & B(\lambda)\\ C(\lambda) & D(\lambda)\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}A(\mu) & B(\mu)\\ C(\mu) & D(\mu)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}A(\lambda)A(\mu) & A(\lambda)B(\mu) & B(\lambda)A(\mu) & B(\lambda)B(\mu)\\ A(\lambda)C(\mu) & A(\lambda)D(\mu) & B(\lambda)C(\mu) & B(\lambda)D(\mu)\\ C(\lambda)A(\mu) & C(\lambda)B(\mu) & D(\lambda)A(\mu) & D(\lambda)B(\mu)\\ C(\lambda)C(\mu) & C(\lambda)D(\mu) & D(\lambda)C(\mu) & D(\lambda)D(\mu)\end{bmatrix} \tag{6.14}$$

$$\mathcal{R}(\lambda,\mu)(\mathcal{T}(\lambda)\otimes\mathcal{T}(\mu))$$

$$=\begin{bmatrix}A(\lambda)A(\mu) & A(\lambda)B(\mu)\\ bA(\lambda)C(\mu)+cC(\lambda)A(\mu) & bA(\lambda)D(\mu)+cC(\lambda)B(\mu)\\ cA(\lambda)C(\mu)+bC(\lambda)A(\mu) & cA(\lambda)D(\mu)+bC(\lambda)B(\mu)\\ C(\lambda)C(\mu) & C(\lambda)D(\mu)\end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} B(\lambda)A(\mu) & B(\lambda)B(\mu) \\ bB(\lambda)C(\mu)+cD(\lambda)A(\mu) & bB(\lambda)D(\mu)+cD(\lambda)B(\mu) \\ cB(\lambda)C(\mu)+bD(\lambda)A(\mu) & cB(\lambda)B(\mu)+bD(\lambda)B(\mu) \\ D(\lambda)C(\mu) & D(\lambda)D(\mu) \end{matrix}\Bigg] \tag{6.15}$$

$$.(\mathscr{T}(\mu)\otimes\mathscr{T}(\lambda))\,\mathscr{R}(\lambda,\mu)$$

$$=\begin{bmatrix} A(\mu)A(\lambda) & bA(\mu)B(\lambda)+cB(\mu)A(\lambda) & cA(\mu)B(\lambda)+bB(\mu)A(\lambda) & B(\mu)B(\lambda) \\ A(\mu)C(\lambda) & bA(\mu)D(\lambda)+cB(\mu)C(\lambda) & cA(\mu)D(\lambda)+bB(\mu)C(\lambda) & B(\mu)D(\lambda) \\ C(\mu)A(\lambda) & bC(\mu)B(\lambda)+cD(\mu)A(\lambda) & cC(\mu)B(\lambda)+bD(\mu)A(\lambda) & D(\mu)B(\lambda) \\ C(\mu)C(\lambda) & bC(\mu)D(\lambda)+cD(\mu)C(\lambda) & cC(\mu)D(\lambda)+bD(\mu)C(\lambda) & D(\mu)D(\lambda) \end{bmatrix} \tag{6.16}$$

(6.15)と(6.16)の各要素が等しいことより

$$[A(\lambda),\ A(\mu)]=0$$
$$[B(\lambda),\ B(\mu)]=0$$
$$[C(\lambda),\ C(\mu)]=0$$
$$[D(\lambda),\ D(\mu)]=0 \tag{6.17}$$

$$B(\lambda)A(\mu)=b(\lambda,\mu)\,B(\mu)A(\lambda)+c(\lambda,\mu)\,A(\mu)B(\lambda) \tag{6.18}$$

$$B(\mu)D(\lambda)=b(\lambda,\mu)\,B(\lambda)A(\mu)+c(\lambda,\mu)D(\lambda)B(\mu) \tag{6.19}$$

$$c(\lambda,\mu)[C(\lambda),\ B(\mu)]=b(\lambda,\mu)(A(\mu)D(\lambda)-A(\lambda)D(\mu))$$
$$c(\lambda,\mu)[D(\lambda),\ A(\mu)]=b(\lambda,\mu)(B(\mu)C(\lambda)-B(\lambda)C(\mu)) \tag{6.20}$$

である*。

(6.9), (6.10)より

$$e_{\mathrm{n}}^{+}\equiv\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\qquad e_{\mathrm{n}}^{-}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \tag{6.21}$$

とすると

$$\alpha_{\mathrm{n}}(\lambda)\,e_{\mathrm{n}}^{+}=\alpha(\lambda)e_{\mathrm{n}}^{+}$$
$$\delta_{\mathrm{n}}(\lambda)\,e_{\mathrm{n}}^{+}=\delta(\lambda)\,e_{\mathrm{n}}^{+} \qquad (6.22)^{**}$$

$$\gamma_n e_n^+ = 0$$

$$\alpha(\lambda) = \sin(\lambda+\eta) \qquad \delta(\lambda) = \sin(\lambda-\eta) \tag{6.23}$$

となる。e_n^+ を local vacuum という。これは $\mathscr{L}_n(\lambda)$ の左下の項を消す。

$$\Omega \equiv e_1^+ \otimes e_2^+ \otimes \cdots \otimes e_N^+ \tag{6.24}$$

とすると Ω は $A(\lambda)$, $D(\lambda)$ の固有ベクトルである。

$$A(\lambda)\Omega = \alpha^N(\lambda)\,\Omega \tag{6.25}$$

$$D(\lambda)\Omega = \delta^N(\lambda)\,\Omega \tag{6.26}$$

$$C(\lambda)\Omega = 0 \tag{6.27}$$

前頁脚註

* 次の形の方が使いやすい形である。

$$A(\lambda)B(\mu) = \frac{1}{C(\mu,\lambda)} B(\mu)A(\lambda) - \frac{b(\mu,\lambda)}{C(\mu,\lambda)} B(\lambda)A(\mu) \tag{6.18'}$$

$$D(\lambda)B(\mu) = \frac{1}{C(\lambda,\mu)} B(\mu)D(\lambda) - \frac{b(\lambda,\mu)}{C(\lambda,\mu)} B(\lambda)D(\mu) \tag{6.19'}$$

$\beta_n e_n^+ = (w_1 + w_2)\, e_n^- = \sin 2\eta\, e_n^-$ で β_n は S_n^- に類似の演算子である。$B(\lambda)$ は $N=3$ のとき explicit に $\mathscr{T}_3$ を作ると

$$\mathscr{T}_3 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \gamma_3 & \delta_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\gamma_3 & \alpha_2\beta_3 + \beta_2\delta_3 \\ \gamma_2\alpha_3 + \delta_2\gamma_3 & \gamma_2\beta_3 + \delta_2\delta_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\beta_2\gamma_3 + \beta_1\gamma_2\alpha_3 + \beta_1\delta_2\gamma_3 & \alpha_1\alpha_2\beta_3 + \alpha_1\beta_2\delta_3 + \beta_1\gamma_2\beta_3 + \beta_1\delta_2\delta_3 \\ \gamma_1\alpha_2\alpha_3 + \gamma_1\beta_2\gamma_3 + \delta_1\gamma_2\alpha_3 + \delta_1\delta_2\gamma_3 & \gamma_1\alpha_2\beta_3 + \gamma_1\beta_2\delta_3 + \delta_1\gamma_2\beta_3 + \delta_1\delta_2\delta_3 \end{bmatrix}$$

ゆえに γ_n が一つでもあると Ω に作用したとき消えるから

$$A\,\Omega = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\,\Omega = \alpha^3\,\Omega$$

$$D\,\Omega = \delta_1\delta_2\delta_3\,\Omega = \delta^3\,\Omega$$

$$C\,\Omega = 0$$

$$B\,\Omega = (\alpha_1\alpha_2\beta_3 + \alpha_1\beta_2\delta_3 + \beta_1\delta_2\delta_3)\,\Omega$$

$$= \sin 2\eta\,[\alpha^2 e_1^+ e_2^+ e_3^- + \alpha\delta e_1^+ e_2^- e_3^+ + \delta^2 e_1^- e_2^+ e_3^+]$$

B は 1 d Heisenberg モデルでいえば 1 ケのスピンを反転した状態の一次結合を作る演算子である。

$T(\lambda)$の固有ベクトルΦを次の形におく。

$$\Phi(\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_m) = \prod_{l=1}^{m} B(\lambda_l)\,\Omega \qquad m=0,\ 1,\ 2\ \cdots\ N \tag{6.28}$$

λ_lは1 d Heisenbergモデルの場合の運動量に相当し，lはその量子数である。$T(\lambda)=A(\lambda)+D(\lambda)$を作用させると

$$[A(\lambda)+D(\lambda)]\ \prod_{l=1}^{m} B(\lambda_l)\,\Omega$$

$$=\left\{\frac{1}{c(\lambda_1, \lambda)} B(\lambda_1)A(\lambda) - \frac{b(\lambda_1, \lambda)}{c(\lambda_1, \lambda)} B(\lambda)A(\lambda_1)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{c(\lambda, \lambda_1)} B(\lambda_1)D(\lambda) - \frac{b(\lambda, \lambda_1)}{c(\lambda, \lambda_1)} B(\lambda)D(\lambda_1)\right\} \prod_{l=2}^{m} B(\lambda_l)\,\Omega \tag{6.29}$$

$$= \frac{1}{c(\lambda_1, \lambda)} B(\lambda_1)\left\{\frac{1}{c(\lambda_2, \lambda)} B(\lambda_2)A(\lambda) - \frac{b(\lambda_2, \lambda)}{c(\lambda_2, \lambda)} B(\lambda)A(\lambda_2)\right\}$$

$$- \frac{b(\lambda_1, \lambda)}{c(\lambda_1, \lambda)} B(\lambda)\left\{\frac{1}{c(\lambda_2, \lambda_1)} B(\lambda_2)A(\lambda_1) - \frac{b(\lambda_2, \lambda_1)}{c(\lambda_2, \lambda_1)} B(\lambda_1)A(\lambda_2)\right\}$$

$$+ \frac{1}{c(\lambda, \lambda_1)} B(\lambda_1)\left\{\frac{1}{c(\lambda, \lambda_2)} B(\lambda_2)D(\lambda) - \frac{b(\lambda, \lambda_2)}{c(\lambda, \lambda_2)} B(\lambda)D(\lambda_2)\right\}$$

$$- \frac{b(\lambda, \lambda_1)}{c(\lambda, \lambda_1)} B(\lambda)\left\{\frac{1}{c(\lambda_1, \lambda_2)} B(\lambda_2)D(\lambda_1) - \frac{b(\lambda_1, \lambda_2)}{c(\lambda_1, \lambda_2)} B(\lambda_1)D(\lambda_2)\right\}$$

$$\times \prod_{l=3}^{m} B(\lambda_1)\,\Omega \tag{6.30}$$

$$=\left\{\frac{1}{c(\lambda_1, \lambda)}\frac{1}{c(\lambda_2, \lambda)} B(\lambda_1)B(\lambda_2)A(\lambda)B(\lambda_3)\right.$$

$$- \frac{1}{c(\lambda_1, \lambda)}\frac{b(\lambda_2, \lambda)}{c(\lambda_2, \lambda)} B(\lambda_1)B(\lambda)A(\lambda_2)B(\lambda_3)$$

$$- \frac{b(\lambda_1, \lambda)}{c(\lambda_1, \lambda)}\frac{1}{c(\lambda_2, \lambda_1)} B(\lambda)B(\lambda_2)A(\lambda_1)B(\lambda_3)$$

$$+ \frac{b(\lambda_1, \lambda)}{c(\lambda_1, \lambda)}\frac{b(\lambda_2, \lambda_1)}{c(\lambda_2, \lambda_1)} B(\lambda)B(\lambda_1)A(\lambda_2)B(\lambda_3)$$

$$+ \frac{1}{c(\lambda, \lambda_1)}\frac{1}{c(\lambda, \lambda_2)} B(\lambda_1)B(\lambda_2)D(\lambda)B(\lambda_3)$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{c(\lambda,\lambda_1)}\frac{b(\lambda,\lambda_2)}{c(\lambda,\lambda_2)}B(\lambda_1)B(\lambda)D(\lambda_2)B(\lambda_3)\\
&-\frac{b(\lambda,\lambda_1)}{c(\lambda,\lambda_1)}\frac{1}{c(\lambda_1,\lambda_2)}B(\lambda)B(\lambda_2)D(\lambda_1)B(\lambda_3)\\
&+\frac{b(\lambda,\lambda_1)}{c(\lambda,\lambda_1)}\frac{b(\lambda_1,\lambda_2)}{c(\lambda_1,\lambda_2)}B(\lambda)B(\lambda_1)D(\lambda_2)B(\lambda_3)\Big\}\prod_{l=4}^{m}B(\lambda_l)\,\Omega
\end{aligned}
\tag{6.31}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\Big\{\frac{1}{c(\lambda_1,\lambda)}\frac{1}{c(\lambda_2,\lambda)}B(\lambda_1)B(\lambda_2)\left[\frac{1}{c(\lambda_3,\lambda)}B(\lambda_3)A(\lambda)-\frac{b(\lambda_3,\lambda)}{c(\lambda_3,\lambda)}B(\lambda)A(\lambda_3)\right]\\
&-\frac{1}{c(\lambda_1,\lambda)}\frac{b(\lambda_2,\lambda)}{c(\lambda_2,\lambda)}B(\lambda_1)B(\lambda)\left[\frac{1}{c(\lambda_3,\lambda_2)}B(\lambda_3)A(\lambda_2)-\frac{b(\lambda_3,\lambda_2)}{c(\lambda_3,\lambda_2)}B(\lambda_2)A(\lambda_3)\right]\\
&-\frac{b(\lambda_1,\lambda)}{c(\lambda_1,\lambda)}\frac{1}{c(\lambda_2,\lambda_1)}B(\lambda)B(\lambda_2)\left[\frac{1}{c(\lambda_3,\lambda_1)}B(\lambda_3)A(\lambda_1)-\frac{b(\lambda_3,\lambda_1)}{c(\lambda_3,\lambda_1)}B(\lambda_1)A(\lambda_3)\right]\\
&+\frac{b(\lambda_1,\lambda)}{c(\lambda_1,\lambda)}\frac{b(\lambda_2,\lambda_1)}{c(\lambda_2,\lambda_1)}B(\lambda)B(\lambda_1)\left[\frac{1}{c(\lambda_3,\lambda_2)}B(\lambda_3)A(\lambda_2)-\frac{b(\lambda_3,\lambda_2)}{c(\lambda_3,\lambda_2)}B(\lambda_2)A(\lambda_3)\right]\\
&+\frac{1}{c(\lambda,\lambda_1)}\frac{1}{c(\lambda,\lambda_2)}B(\lambda_1)B(\lambda_2)\left[\frac{1}{c(\lambda,\lambda_3)}B(\lambda_3)D(\lambda)-\frac{b(\lambda,\lambda_3)}{c(\lambda,\lambda_3)}B(\lambda)D(\lambda_3)\right]\\
&-\frac{1}{c(\lambda,\lambda_1)}\frac{b(\lambda,\lambda_2)}{c(\lambda,\lambda_2)}B(\lambda_1)B(\lambda)\left[\frac{1}{c(\lambda_2,\lambda_3)}B(\lambda_3)D(\lambda_2)-\frac{b(\lambda_2,\lambda_3)}{c(\lambda_2,\lambda_3)}B(\lambda_2)D(\lambda_3)\right]\\
&-\frac{b(\lambda,\lambda_1)}{c(\lambda,\lambda_1)}\frac{1}{c(\lambda_1,\lambda_2)}B(\lambda)B(\lambda_2)\left[\frac{1}{c(\lambda_1,\lambda_3)}B(\lambda_3)D(\lambda_1)-\frac{b(\lambda_1,\lambda_3)}{c(\lambda_1,\lambda_3)}B(\lambda_1)D(\lambda_3)\right]\\
&+\frac{b(\lambda,\lambda_1)}{c(\lambda,\lambda_1)}\frac{b(\lambda_1,\lambda_2)}{c(\lambda_1,\lambda_2)}B(\lambda)B(\lambda_1)\left[\frac{1}{c(\lambda_2,\lambda_3)}B(\lambda_3)D(\lambda_2)-\frac{b(\lambda_2,\lambda_3)}{c(\lambda_2,\lambda_3)}B(\lambda_2)D(\lambda_3)\right]\Big\}\\
&\times\prod_{l=4}^{m}B(\lambda_l)\,\Omega
\end{aligned}
\tag{6.32}
$$

これを繰返すと 2^m 個の項が出る。その第１項は

$$
\begin{aligned}
&\left[\prod_{l=1}^{m}\frac{1}{c(\lambda_l,\lambda)}B(\lambda_l)\right]A(\lambda)\,\Omega\\
=&\left[\prod_{l=1}^{m}\frac{1}{c(\lambda_l,\lambda)}B(\lambda_l)\right]\alpha^N(\lambda)\,\Omega
\end{aligned}
$$

$$= \alpha^N(\lambda)\left[\prod_{l=1}^{m} \frac{1}{c(\lambda_l, \lambda)}\right]\prod_{l=1}^{m} B(\lambda_l)\,\Omega$$

$$= \alpha^N(\lambda)\left[\prod_{l=1}^{m} \frac{1}{c(\lambda_l, \lambda)}\right]\Phi(\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_m) \tag{6.33}$$

第 $(2^{m-1}+1)$ 項は

$$\delta^N(\lambda)\left[\prod_{l=1}^{m}\frac{1}{c(\lambda, \lambda)}\right]\Phi(\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_m) \tag{6.34}$$

となる。故に残りの項が消えるように λ_l が定められれば固有値 Λ は

$$\Lambda(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m) = \alpha^N(\lambda)\prod_{l=1}^{m}\frac{1}{c(\lambda_l, \lambda)} + \delta^N(\lambda)\prod_{l=1}^{m}\frac{1}{c(\lambda, \lambda_l)} \tag{6.35}$$

となり $\Phi(\lambda_1, \cdots \lambda_m)$ は固有ベクトルである。

残りの項の内 λ_1 が λ の代りに入った項 Λ_1 は

$$\Lambda_1(\lambda; \lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m)$$

$$= -\frac{b(\lambda_1, \lambda)}{c(\lambda_1, \lambda)}\alpha^N(\lambda_1)\prod_{l=2}^{m}\frac{1}{c(\lambda_l, \lambda_1)} - \frac{b(\lambda, \lambda_1)}{c(\lambda, \lambda_1)}\delta^N(\lambda_1)\prod_{l=2}^{m}\frac{1}{c(\lambda_1, \lambda_l)}$$

$$= \frac{b(\lambda, \lambda_1)}{c(\lambda, \lambda_1)}\left(\alpha^N(\lambda_1)\prod_{l=2}^{m}\frac{1}{c(\lambda_l, \lambda_1)} - \delta^N(\lambda_1)\prod_{l=2}^{m}\frac{1}{c(\lambda_1, \lambda_l)}\right) \tag{6.36}$$

である。$B(\lambda)$ と $B(\mu)$ は可換であるから λ_j が λ の代りに入った項は

$$\Lambda_j(\lambda; \lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m)$$

$$= \frac{b(\lambda, \lambda_j)}{c(\lambda, \lambda_j)}\left(\alpha^N(\lambda_j)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{m}\frac{1}{c(\lambda_l, \lambda_j)} - \delta^N(\lambda_j)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{m}\frac{1}{c(\lambda_j, \lambda_l)}\right) \tag{6.37}$$

となる。故に

$$\Lambda_j(\lambda; \lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m) = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots m \tag{6.38}$$

すなわち

$$\frac{\alpha^N(\lambda_j)}{\delta^N(\lambda_j)} = \prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{m}\frac{c(\lambda_l, \lambda_j)}{c(\lambda_j, \lambda_l)} \tag{6.39}$$

であるように λ_j が求められたとき，$\Lambda(\lambda; \lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m)$ は固有値，$\prod B(\lambda_l)\Omega$ は固有ベクトルである。

(6.35)および(6.37)はあらわに書くと

$$\Lambda(\lambda;\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_m)$$

$$=\sin^N(\lambda+\eta)\prod_{l=1}^{m}\frac{\sin(\lambda_l-\lambda+2\eta)}{\sin(\lambda_j-\lambda)}$$

$$+\sin^N(\lambda-\eta)\prod_{l=1}^{m}\frac{\sin(\lambda-\lambda_l+2\eta)}{\sin(\lambda-\lambda_l)} \tag{6.40}$$

および

$$\sin^N(\lambda_j+\eta)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{m}\sin(\lambda_j-\lambda_l-2\eta)$$

$$=\sin^N(\lambda_j-\eta)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{m}\sin(\lambda_j-\lambda_l+2\eta) \tag{6.41}$$

すなわち

$$\frac{\sin^N(\lambda_j+\eta)}{\sin^N(\lambda_j-\eta)}=\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{m}\frac{\sin(\lambda_j-\lambda_l+2\eta)}{\sin(\lambda_j-\lambda_l-2\eta)}\qquad(j=1,2,\cdots m) \tag{6.42}$$

となる。(6. 40)は 1d Heisenberg モデルの解法に用いられた Bethe Ansatz の拡張になって居り，ここでは Yang-Baxter 関係式から自然に導かれた。

§7. 積分方程式の導出とその解法

8－vertex モデルのとき (6. 35) および (6. 37) に相当する式は

$$\Lambda(\lambda;\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_m)$$

$$=h^N(\lambda+\eta)\prod_{l=1}^{m}\frac{h(\lambda_l-\lambda+2\eta)}{h(\lambda_l-\lambda)}+h^N(\lambda-\eta)\prod_{l=1}^{m}\frac{h(\lambda-\lambda_l+2\eta)}{h(\lambda-\lambda_l)} \tag{7.1}$$

$$\frac{h^N(\lambda_j+\eta)}{h^N(\lambda_j-\eta)}=\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{m}\frac{h(\lambda_j-\lambda_l+2\eta)}{h(\lambda_j-\lambda_l-2\eta)} \tag{7.2}$$

となる。ここに

$$h(\lambda)\equiv\Theta(0)\,\mathrm{H}(\lambda)\,\Theta(\lambda) \qquad (7.3)^*$$

である。(証略)

---

* $\Theta(\lambda+2K)=\Theta(\lambda)$, $\mathrm{H}(\lambda+2K)=-\mathrm{H}(\lambda)$, より $h(\lambda+2K)=-h(\lambda)$, $\varphi(\lambda+2K)=\varphi(\lambda)$, $\Phi(\lambda+2K)=\Phi(\lambda)$ である。従って積分方程式が Fourier 級数でとける。

最大固有値に相当する固有関数に対しては $m=\dfrac{N}{2}$ であることが分る(証略)(1 d AF Heisenberg モデルのとき基底状態は半数のスピンが反転していることに対応)(7.2)の log をとると

$$\varphi(\lambda_j)=\frac{2\pi l_j}{N}+\frac{1}{N}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{m}\Phi(\lambda_j-\lambda_l) \tag{7.4}$$

l_j は整数で

$$\varphi(\lambda)=\frac{1}{i}\log\frac{h(\lambda+\eta)}{h(\lambda-\eta)} \tag{7.5}$$

$$\Phi(\lambda)=\frac{1}{i}\log\frac{h(\lambda+2\eta)}{h(\lambda-2\eta)}$$

$\Lambda_{\max}$ に対しては

$$l_{j+1}-l_j=-1 \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots\ m-1,\ m=N/2)$$

が対応する(証略)。$N\to\infty$ としたとき λ_j が$-K$から K の間の分布関数を $\rho(\lambda)$ とすると($K=K_k$ は母数 k に対する第一種完全楕円積分)

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n}f(\lambda_j)=\int_{-K}^{K}f(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda \tag{7.7}$$

すなわち $\rho(\lambda)$は次の積分方程式をみたす。

$$\varphi'(\lambda)=-2\pi\rho(\lambda)+\int_{-K}^{K}\Phi'(\lambda-\mu)\,\rho(\mu)d\mu \tag{7.8}$$

この積分方程式を Fourier 級数でとく。

$$\rho_m=\frac{1}{2K}\int_{-K}^{K}\rho(\lambda)\,e^{-i\pi m\lambda/K}d\lambda \tag{7.9}$$

$$\varphi_m=\frac{1}{2K}\int_{-K}^{K}\varphi'(\lambda)\,e^{-i\pi m\lambda/K}d\lambda \tag{7.10}$$

$$\Phi=\frac{1}{2K}\int_{-K}^{K}\Phi'(\lambda)\,e^{-i\pi m\lambda/K}d\lambda \tag{7.11}$$

(7.9), (7.10), (7.11)を(7.8)に入れて

$$\varphi_m=-2\pi\rho_m+2K\rho_m\Phi_m \tag{7.12}$$

すなわち

$$\rho_m=\frac{\varphi_m}{2K\Phi_m-2\pi} \tag{7.13}$$

楕円関数の Fourier 係数は分っているので

$$\varphi_m=\begin{cases}-\pi/K & m=0\\[2ex] -\dfrac{\pi\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{\pi m(2i\eta+K')}{2K}\right)}{K\mathrm{sh}\left(\dfrac{\pi mK'}{2K}\right)} & m\neq 0\end{cases}\tag{7.14}$$

$$\Phi_m=\begin{cases}-\pi/K & m=0\\[2ex] \dfrac{\pi\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{\pi m(4i\eta+K')}{2K}\right)}{K\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{\pi mK'}{2K}\right)} & m\neq 0\end{cases}\tag{7.15}$$

ゆえに

$$\rho_m=\frac{1}{4K\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{\pi i m\eta}{K}\right)}\tag{7.16}$$

これから

$$\rho(\lambda)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{e^{\pi i m\lambda/K}}{4K\mathrm{ch}(\pi i m\eta/K)}=\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{dn}(\lambda,\widetilde{k})\tag{7.17}$$

$\Lambda_{\max}$ に対して(7.1)の第2項は $O(\mathrm{e}^{-cN})$ のオーダーであることがいえるから，

$$\begin{aligned}-\beta f&=\frac{1}{N}\log\Lambda_{\max}=\log h(\lambda+\eta)\\&+\frac{1}{i}\int_{-K}^{K}\varphi(\lambda-\alpha-\eta)\,\rho(\alpha)\,d\alpha\end{aligned}\tag{7.18}$$

$$\begin{aligned}&=\log(w_1+w_2)\\&+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\,\frac{\mathrm{sh}^2\dfrac{\pi m(K'+2i\eta)}{2K}}{\mathrm{sh}\dfrac{\pi mK'}{K}\;\mathrm{ch}\dfrac{\pi m i\eta}{K}}\left(\mathrm{ch}\frac{\pi m i\eta}{K}-\mathrm{ch}\frac{\pi m i\lambda}{K}\right)\end{aligned}\tag{7.19}$$

これが 8−vertex model の自由エネルギーである。

すなわち vertex weight (2.3) が与えられたとき，(2.4) で w_j を求め大きさと符号に応じて番号のつけかえを行ってから，(5.36)−(5.38) によって l，ζ，v を求め (5.41) によって k，η，λ を求める。η，λ は純虚数になる。k に対する完全楕円積分で $K=K_k$ と $K'=K'_k$ を求め，この K, K'，λ，η を (7.19) にいれたものが求める自由エネルギーである。温度をかえて w_2 と w_3

の大小が反転すると w_j の番号のつけかえを要するためもとのパラメーターで見ると自由エネルギーの表式がかわる。この点が臨界温度 T_C である。$w_2 \to w_3$ で($l \to 0$, $K_l \to \pi/2$, $K_l' \to \infty$, $k \to 1$)自由エネルギーの特異性部分はmを整数として $\pi/\mu \neq 2\mathrm{m}$ ならば

$$(\beta f)_{\mathrm{sing}} \simeq |T-T_C|^{\pi/\mu}$$

$\pi/\mu = 2\mathrm{m}$ ならば

$$(\beta f)_{\mathrm{sing}} \simeq (T-T_C)^{2\mathrm{m}} \log|T-T_C|$$

であることが示されている。(証略)ここで

$$\mu = \frac{\pi\zeta}{K_l}$$

である。これは臨界指数がパラメーターの値に連続的に依存する例が存在することを示したものである。

§8. 8-vertex モデルと1次元XYZモデル

(3.4)により

$$<\gamma_{\mathrm{n}}\alpha_{\mathrm{n}}|\mathscr{L}_{\mathrm{n}}(v)|\gamma_{\mathrm{n+1}}\alpha'_{\mathrm{n}}> = \sum_{j=1}^{4} w_j(v)\,\sigma^j_{\gamma_{\mathrm{n}}\gamma_{\mathrm{n+1}}}\,\sigma^j_{\alpha_{\mathrm{n}}\alpha'_{\mathrm{n}}} \tag{8.1}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{n}} = \begin{array}{cc|cccc} & \gamma_{\mathrm{n+1}} & 1 & 1 & -1 & -1 \\ \gamma_{\mathrm{n}} & \alpha_{\mathrm{n}}\ \ \alpha'_{\mathrm{n}} & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & w_4+w_3 & 0 & 0 & w_1-w_2 \\ 1 & -1 & 0 & w_4-w_3 & w_1+w_2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & w_1+w_2 & w_4-w_3 & 0 \\ -1 & -1 & w_1-w_2 & 0 & 0 & w_4+w_3 \end{array} \tag{8.2}$$

である。いま

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2}(w_1-w_2-w_3+w_4) \\ p_2 &= \frac{1}{2}(-w_1+w_2-w_3+w_4) \\ p_3 &= \frac{1}{2}(-w_1-w_2+w_3+w_4) \\ p_4 &= \frac{1}{2}(w_1+w_2+w_3+w_4) \end{aligned} \tag{8.3}$$

により p_1, p_2, p_3, p_4 を導入すると

$$
\begin{aligned}
w_4+w_3&=p_4+p_3\\
w_1+w_2&=p_4-p_3\\
w_4-w_3&=p_1+p_2\\
w_1-w_2&=p_1-p_2
\end{aligned}
\tag{8.4}
$$

であるから

$$
\mathscr{L}_{\mathrm{n}}=
\begin{array}{ccc}
 & & \gamma_{\mathrm{n+1}} \\
\gamma_{\mathrm{n}} & \alpha_{\mathrm{n}} & \alpha'_{\mathrm{n}} \\
1 & 1 & \\
1 & -1 & \\
-1 & 1 & \\
-1 & -1 &
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1
\end{array}\\
\begin{bmatrix}
p_4+p_3 & 0 & 0 & p_1-p_2\\
0 & p_1+p_2 & p_4-p_3 & 0\\
0 & p_4-p_3 & p_1+p_2 & 0\\
p_1+p_2 & 0 & 0 & p_4+p_3
\end{bmatrix}
\end{array}
\tag{8.5}
$$

(8.5)を(8.1)(8.2)とくらべると w_j を p_j にかえ，α'_{n} と $\gamma_{\mathrm{n+1}}$ をいれかえたものになっている。したがって

$$
<\gamma_{\mathrm{n}}\alpha_{\mathrm{n}}\,|\,\mathscr{L}_{\mathrm{n}}(v)\,|\,\gamma_{\mathrm{n+1}}\alpha'_{\mathrm{n}}>=\sum_{j=1}^{4}p_j\,\sigma^{j}_{\gamma_{\mathrm{n}}\alpha'_{\mathrm{n}}}\,\sigma^{j}_{\alpha_{\mathrm{n}}\gamma_{\mathrm{n+1}}}
\tag{8.6}
$$

w_j として(5.35)の parametrization を用いる。

$$
w_1=\frac{\mathrm{cn}(v,\,l)}{\mathrm{cn}(\zeta,\,l)},\quad w_2=\frac{\mathrm{dn}(v,\,l)}{\mathrm{dn}(\zeta,\,l)},\quad w_3=1,\quad w_4=\frac{\mathrm{sn}(v,\,l)}{\mathrm{sn}(\zeta,\,l)}
\tag{8.7}
$$

ここで ζ を定数，v を変数と考える。$v=\zeta$ のときは $p_1=p_2=p_3=0$，$p_4=2$ であるから

$$
<\gamma_{\mathrm{n}}\alpha_{\mathrm{n}}\,|\,\mathscr{L}_{\mathrm{n}}(\zeta)\,|\,\gamma_{\mathrm{n+1}}\alpha'_{\mathrm{n}}>=2\,\delta(\gamma_{\mathrm{n}},\,\alpha'_{\mathrm{n}})\,\delta(\alpha_{\mathrm{n}},\,\gamma_{\mathrm{n+1}})
\tag{8.8}
$$

となる。($\delta(\alpha,\,\alpha')$ は Kronecker のデルタ)

$$
T_N=\mathrm{tr}\,\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2\cdots\mathscr{L}_N
\tag{8.9}
$$

であるから $v=\zeta$ のとき

$$
\begin{aligned}
&<\{\alpha\}\,|\,T_N(\zeta)\,|\,\{\alpha'\}>\\
&=2^N\sum_{\gamma_1}\cdots\sum_{\gamma_N}\delta(\gamma_1,\,\alpha'_1)\,\delta(\alpha_1,\,\gamma_2)\,\delta(\gamma_2,\,\alpha'_2)\,\delta(\alpha_2,\,\gamma_3)\cdots\delta(\gamma_N,\,\alpha'_N)\,\delta(\alpha_N,\,\gamma_1)\\
&=2^N\delta(\alpha_1,\,\alpha'_2)\,\delta(\alpha_2,\,\alpha'_3)\cdots\delta(\alpha_N,\,\alpha'_1)
\end{aligned}
\tag{8.10}
$$

すなわち $2^{-N}T_N(\zeta)$ は cyclic operator である。$T_N(\zeta)$ の逆行列を $T_N{}^{-1}(\zeta)$ とすると

$$<\{\alpha\}\mid T_N{}^{-1}(\zeta)\mid\{\alpha'\}>$$
$$=2^{-N}\delta(\alpha_1,\alpha'_N)\delta(\alpha_2,\alpha'_1)\cdots(\alpha_J,\alpha'_{J-1})\delta(\alpha_{J+1},\alpha'_J)\delta(\alpha_{J+2},\alpha'_{J+1})\cdots\delta(\alpha_N,\alpha'_{N-1})\quad(8.11)$$

$$\because\ \sum_{\{\alpha''\}}<\{\alpha\}\mid T_N\mid\{\alpha''\}><\{\alpha''\}\mid T_N{}^{-1}\mid\{\alpha'\}>$$
$$=\delta(\alpha_1,\alpha'_1)\,\delta(\alpha_2,\alpha'_2)\ \cdots\ \delta(\alpha_N,\alpha'_N)=<\{\alpha\}\mid\{\alpha'\}>$$

$T_N{}^{-1}\,T_N$ も同様。

いま

$$\left[\frac{d}{dv}\log T_N(v)\right]_{v=\zeta}=T_N{}^{-1}(\zeta)\left[\frac{d}{dv}\ T_N(v)\right]_{v=\zeta}\quad(8.12)$$

を計算する。先ず

$$<\{\alpha\}\left|\left[\frac{d}{dv}\ T_N(v)\right]_{v=\zeta}\right|\{\alpha'\}>$$

$$=2^{N-1}\sum_{J=1}^{N}\sum_{\gamma_1}\cdots\sum_{\gamma N}\delta(\gamma_1,\alpha'_1)\,\delta(\alpha_1,\gamma_2)\,\delta(\gamma_2,\alpha'_2)\,\delta(\alpha_2,\gamma_3)\ \cdots\ \delta(\gamma_{J-1},\alpha'_{J-1})\,\delta(\alpha_{J-1},\gamma_J)$$

$$\times<\gamma_J\,\alpha_J\left|\left[\frac{d}{dv}\mathscr{L}_J(v)\right]_{v=\zeta}\right|\gamma_{J+1}\alpha'_J>\delta(\gamma_{J+1},\alpha'_{J+1})\,\delta(\alpha_{J+1},\gamma_{J+2})\ \cdots$$

$$\times\ \delta(\gamma_N,\alpha'_N)\,\delta(\alpha_N,\gamma_1)$$

$$=2^{N-1}\sum_{J=1}^{N}\delta(\alpha'_1,\alpha_N)\ \delta(\alpha'_2,\alpha_1)\ \cdots\ \delta(\alpha'_{J-1},\alpha_{J-2})$$

$$\times<\alpha_{J-1}\alpha_J\left|\left[\frac{d}{dv}\mathscr{L}_J(v)\right]_{v=\zeta}\right|\alpha'_{J+1}\alpha'_J>\delta(\alpha'_{J+2},\alpha_{J+1})\ \cdots\ \delta(\alpha'_N,\alpha_{N-1})\quad(8.13)$$

(8.12)はゆえに

$$<\{\alpha\}\mid(8.12)\mid\{\alpha'\}>$$

$$=\sum_{\{\alpha''\}}<\{\alpha\}\mid T_N{}^{-1}(\zeta)\mid\{\alpha''\}><\{\alpha''\}\left|\left[\frac{d}{dv}\ T_N(v)\right]_{v=\zeta}\right|\{\alpha'\}>$$

$$=\frac{1}{2}\sum_J\sum_{\{\alpha''\}}\delta(\alpha_1,\alpha''_N)\,\delta(\alpha_2,\alpha''_1)\ \cdots\ \delta(\alpha_J,\alpha''_{J-1})\,\delta(\alpha_{J+1},\alpha''_J)\ \cdots\ \delta(\alpha_N,\alpha''_{N-1})$$

$$\times\ \delta(\alpha'_1,\alpha''_N)\,\delta(\alpha'_2,\alpha''_1)\ \cdots\ \delta(\alpha'_{J-1},\alpha''_{J-2})<\alpha''_{J-1}\alpha''_J\left|\left[\frac{d}{dv}\ \mathscr{L}_J(v)\right]_{v=\zeta}\right|\alpha'_{J+1}\alpha'_J>$$

$$\times\ \delta(\alpha'_{J+2},\alpha''_{J+1})\ \cdots\ \delta(\alpha''_N,\alpha''_{N-1})$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{J=1}^{N}\delta(\alpha_1,\alpha_1')\,\delta(\alpha_2,\alpha_2')\cdots\delta(\alpha_{J-1},\alpha_{J-1}')<\alpha_J\alpha_{J+1}\left|\left[\frac{d}{dv}\mathscr{L}_J(v)\right]_{v=\zeta}\right|\alpha_{J+1}'\alpha_J'>$$

$$\times\,\delta(\alpha_{J+1},\alpha_{J+1}')\cdots\delta(\alpha_N,\alpha_N') \tag{8.14}$$

と書ける。(8.6)より

$$<\alpha_J\alpha_{J+1}|\mathscr{L}_J'(\zeta)|\alpha_{J+1}'\alpha_J'>$$

$$=\sum_{j=1}^{4}\mathrm{p}_j'\,\sigma^j_{\alpha_J\alpha_J'}\,\sigma^j_{\alpha_{J+1}\alpha_{J+1}'} \tag{8.15}$$

$$=p_1'\sigma^1\otimes\sigma^1+p_2'\sigma_2\otimes\sigma_2+p_3'\sigma_3\otimes\sigma_3+p_4'\sigma_4\otimes\sigma_4$$

である。従って$\left[\frac{d}{dv}\log T(v)\right]_{v=\zeta}$ は交換相互作用が3成分J_x, J_y, J_z をもつ Heisenberg modelすなわちXYZモデルのハミルトニアンである。

$$\left[\frac{d}{dv}\log T(v)\right]_{v=\zeta}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{J=1}^{N}(p_1'\sigma_J^1\sigma_{J+1}^1+p_2'\sigma_J^2\sigma_{J+1}^2+p_3'\sigma_J^3\sigma_{J+1}^3)+\frac{1}{2}p_4'E \tag{8.16}$$

(Eは$2^N\times 2^N$の単位行列)

ここに

$$p_3'=\left[\frac{dp_j}{dv}\right]_{v=\zeta}\qquad \mathscr{L}_J'(\zeta)=\left[\frac{d}{dv}\mathscr{L}_J(v)\right]_{v=\zeta} \tag{8.17}$$

である。

(8.7)より

$$w_1'=\frac{-\,\mathrm{sn}\,\zeta\,\mathrm{dn}\,\zeta}{\mathrm{cn}\,\zeta}\qquad w_2'=\frac{-k^2\,\mathrm{sn}\,\zeta\,\mathrm{cn}\,\zeta}{\mathrm{dn}\,\zeta}\qquad w_3'=0\qquad w_4'=\frac{\mathrm{cn}\,\zeta\,\mathrm{dn}\,\zeta}{\mathrm{sn}\,\zeta} \tag{8.18}$$

であるから

$$p_1'=\frac{-\,\mathrm{sn}\,\zeta\,\mathrm{dn}\,\zeta}{\mathrm{cn}\,\zeta}+\frac{k^2\mathrm{sn}\,\zeta\,\mathrm{cn}\,\zeta}{\mathrm{dn}\,\zeta}+\frac{\mathrm{cn}\,\zeta\,\mathrm{dn}\,\zeta}{\mathrm{sn}\,\zeta}$$

$$=\frac{-\,\mathrm{sn}^2\zeta\,\mathrm{dn}^2\zeta+k^2\,\mathrm{sn}^2\zeta\,\mathrm{cn}^2\zeta+\mathrm{cn}^2\zeta\,\mathrm{dn}^2\zeta}{\mathrm{cn}\,\zeta\,\mathrm{dn}\,\zeta\,\mathrm{sn}\,\zeta}$$

$$=\frac{\mathrm{cn}^2\zeta-\mathrm{sn}^2\zeta\,\mathrm{dn}^2\zeta}{2\,\mathrm{sn}\,\zeta\,\mathrm{cn}\,\zeta\,\mathrm{dn}\,\zeta}$$

$$=\frac{\mathrm{cn}\,2\zeta}{\mathrm{sn}\,2\zeta} \tag{8.19}$$

同時に

$$p_2' = \frac{\mathrm{dn}\ 2\zeta}{\mathrm{sn}\ 2\zeta}$$

$$p_3' = \frac{1}{\mathrm{sn}\ 2\zeta}$$

$$p_4' = \frac{\mathrm{cn}\ 2\zeta + \mathrm{dn}\ 2\zeta - 1}{\mathrm{sn}\ 2\zeta} \tag{8.20}$$

従って

$$J_x : J_y : J_z = \mathrm{cn}\, 2\zeta : \mathrm{dn}\ 2\zeta : 1 \tag{8.21}$$

となるように l と ζ を選んだとき

$$\mathcal{H} = -J_z\ \mathrm{sn}\, 2\zeta\left[\frac{d}{dv}\log T(v) - \frac{1}{2} N p_4'\right] \tag{8.22}$$

となる。log $T(v)$の固有関数は $T(v)$ の固有関数と同じであるのでその最大固有値に対応する固有関数から1次元XYZ モデルの基底エネルギーを求めることが出来る。

§9. Villain モデルと Miyashita モデル

Fig. 9において実線を強磁性ボンドK, 点線を反強磁性ボンド$-K$とすると，これはregularだがfrustration のあるモデルでこれを Villain モデル[1]という。σ_0 を中心とする $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4$ のクラスターを考えて σ_0 で和をとると

$$\sum_{\sigma_0} \exp[K\sigma_0(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4)] = \mathrm{ch}K(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4)$$

$$= \frac{A}{2}\exp[K_1(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_4+\sigma_4\sigma_1)$$

$$+K_2(\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_4)+K_4\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4] \tag{9.1}$$

$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) = (1, 1, 1, 1)$, $(-1, 1, 1, 1)$, $(-1, -1, 1, 1)$, $(-1, 1, -1, 1)$を両辺に入れて

$$\begin{aligned} &A\exp(4K_1+2K_2+K_4) &&= \mathrm{ch}\ 4K \\ &A\exp(-K_4) &&= \mathrm{ch}\ 2K \\ &A\exp(-2K_2+K_4) &&= 1 \\ &A\exp(-4K_1+2K_2+K_4) &&= 1 \end{aligned} \tag{9.2}$$

これをといて A, K_1, K_2, K_4 は次のようになる。

$$A=(\mathrm{ch}\ 2K)^{1/2}(\mathrm{ch}\ 4K)^{1/8} \tag{9.3}$$

$$K_1=\frac{1}{8}\log \mathrm{ch}\ 4K \tag{9.4}$$

$$K_2=\frac{1}{8}\log \mathrm{ch}\ 4K \tag{9.5}$$

$$K_4=-\frac{1}{2}\log \mathrm{ch}\ 2K+\frac{1}{8}\log \mathrm{ch}\ 4K \tag{9.6}$$

σ_0' を中心として σ_1, σ_2, σ_3', σ_4' のクラスターについて同様の操作を行うと

$$\sum \exp[K\sigma_0(\sigma_1-\sigma_2+\sigma_3-\sigma_4)]=\mathrm{ch}\,K(\sigma_1-\sigma_2+\sigma_3-\sigma_4)$$

$$=\frac{A'}{2}\exp[K_1'(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_4+\sigma_4\sigma_1)+K_2'(\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_4)$$

$$+K_4'\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4] \tag{9.7}$$

より $A=A'$, $K_1'=-K_1$, $K_2'=K_2$, $K_4'=K_4$ となる。

従って Villain model の状態和は Fig. 9 の○のスピンについて和をとると，Fig. 10 の格子の状態和になるが一重線部分は $K_1+K_1'=0$ で二重線部分が $2K_2$ と 4 体力 K_4 をもったIsing モデルの状態和になる。これは Baxter model と等価で T_C が求まるが 0 になる。これは Forgacs の結果である。始めから Villain model に Fig. 11 のように frustration をより強く出すような 3 rd neighbor interaction K'' を入れておけば K_2 が K_2+K'' に代るだけでとけるという事情は

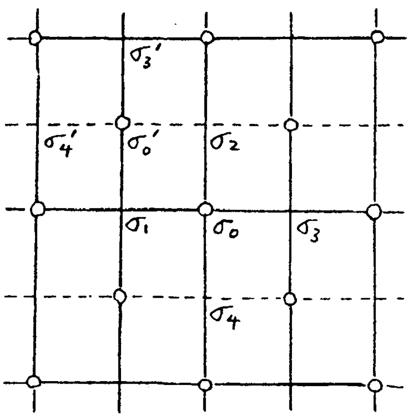


Fig. 9

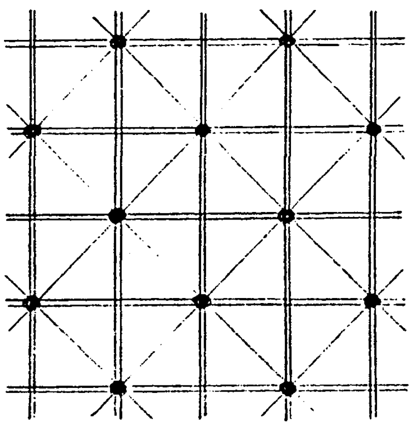


Fig. 10

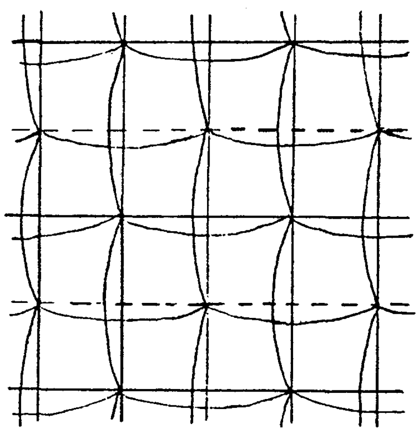


Fig. 11

変らない。Miyashita[3]はVillainモデルに適当なK''を入れるとexactにとけてかつ転移温度が存在することを示した。[*]

§10 補　足

以上8−vertexモデルの自由エネルギーを転送行列の方法で求める方法をのべた。関連する事項やあげなかった文献について二，三補足しておく。8−vertexとdouble layered Ising modelの等価をのべたのはWu[1)]とKadanoff and Wegner[2)]である。状態和の根の分布についてはSuzuki[3)]がしらべている。3角3−spin相互作用の3d 8−vertex modelはdiamond格子についてT_CがThibaudier and Villain[5)]により求められている。long range orderについてはBaxter[6)]自身によって求められた。逆散乱法との関連については§2であげたTakhadzhan-Faddeevの他Thacker[7)] Wadati[8)]のreviewがある。BaxterのfreeevergyからOnsagerのfree energyを導いた論文はまだみていないが御存知の方は御知らせ下さい。[9)]

1) F. Y. Wu, Phys. Rev. **B4** (1971) 2312–2314.

2) L. P. Kadanoff and F. Wegner, Phys. Rev. **B4** (1971) 3989–3993.

3) M. Suzuki, J. Math. Phys. **12** (1971) 235–246.

4) R. J. Baxter, Aust. J. Phys. **27** (1974) 357–367, 369–381.

5) C. Thibaudier and J. Villain, J. Phys. **A5** (1972) 3429–3437.

6) R. J. Baxter, *Fundamental Problems in Statistical Mechanics* Vol. 5 109–141, ed. E. G. D. Cohen, (North Holland, 1980).

7) H. B. Thacker, Rev. Mod. Phys. **53** (1981) 253–285.

8) 和達三樹，日本物理学会誌 **36** (1981) 786–793.

9) R. J. Baxter, M. F. Sykes and M. G. Watts, J. Phys. **A8** (1975) 245–251は級数展開で自由energyの比較を行っている。

Appendix I （5.40）の証明[**]

（5.23），（5.24）より

---

* 1) J. Villian, J. Phys. **C10** 1717 (1977).
  2) G. Forgacs, Phys. Rev. **22** 4473 (1980).
  3) S. Miyashita, 物性研研究会（1982. 6月）

** 広池和夫氏の方法による。

$$\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial u''}{\partial u}+\frac{\partial u'}{\partial v'}\frac{\partial u''}{\partial u'}=0$$

すなわち

$$\frac{\partial u''}{\partial v}+\frac{\partial u''}{\partial v'}=0 \tag{AI. 1}$$

従って u''は $v-v'$ のみの関数である。

$$\left(\because \quad \frac{\partial u''}{\partial(v-v')}\left[\frac{\partial(v-v')}{\partial v}+\frac{\partial(v-v')}{\partial v'}\right]=0\right)$$

ゆえに u''を $v-v''$の関数として求めるには v' を 0 として $u''(v)$ を求めてから v を $v-v'$とおけばよい。

$$\mathrm{sn}(v', l)=\frac{w_4'}{w_3'}\ \mathrm{sn}(\zeta, l)=\frac{w_4'}{w_3'}\left(\frac{w_1'^2-w_2'^2}{w_1'^2-w_4'^2}\right)^{1/2}$$

であるから $w_4'=0$ とおいた場合を考える。(5.7), (5.8), (5.9) より $w_4'=0$ とすると

$$\begin{aligned} &-43'2''+21'4''=12'3''\\ 43'1'' \quad &-12'4''=-21'3''\\ 23'1'' \quad &-32'4''=-41'3'' \end{aligned} \tag{AI. 2}$$

$$\varDelta=\begin{vmatrix} 0 & -43' & 21' \\ 43' & 0 & -12' \\ 23' & 0 & -32' \end{vmatrix}$$

$$=43'3'2'(-43+12) \qquad (\text{第2列で展開}) \tag{AI. 3}$$

$$w_1''=\frac{w_3''}{\varDelta}\begin{vmatrix} 21' & -43' & 21' \\ -21' & 0 & -12' \\ -41' & 0 & -32' \end{vmatrix}$$

$$=\frac{w_3''}{\varDelta}43'1'2'(23-14) \tag{AI. 4}$$

$$w_2''=\frac{w_3''}{\varDelta}\begin{vmatrix} 0 & 12' & 21' \\ 43' & -21' & -12' \\ 23' & -41' & -32' \end{vmatrix}$$

$$=\frac{w_3''}{\varDelta}\{-122'3'(-43+12)+21'3'1'(-4^2+2^2)\} \tag{AI. 5}$$

(第2列で展開)

$$w_4'' = \frac{w_3''}{\varDelta}\begin{vmatrix} 0 & -43' & 12' \\ 43' & 0 & -21' \\ 23' & 0 & -41' \end{vmatrix}$$

$$= \frac{w_3''}{\varDelta} 43'\,1'\,3'(-4^2+2^2) \tag{AI. 6}$$

準備として sn，cn の加法定理の一つの表式を求めておく。

$$\mathrm{sn}(u+v) = \frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v} \tag{AI. 7}$$

を変形する。分子分母に $\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 v$ をかけると

$$(\mathrm{AI.7}) = \frac{(\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 v)(\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)}{\mathrm{sn}^2 u - k^2\,\mathrm{sn}^4 u\,\mathrm{sn}^2 v - \mathrm{sn}^2 v + k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^4 v}$$

$$= \frac{(\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 v)(\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)}{\mathrm{sn}^2 u - (1-\mathrm{dn}^2 u)\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v - \mathrm{sn}^2 v + (1-\mathrm{dn}^2 v)\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v}$$

$$= (\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 v)(\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)$$

$$\times [\,\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v - \mathrm{sn}^2 v + \mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v + \mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{dn}^2 u$$

$$- \mathrm{dn}^2 v\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v\,]^{-1}$$

$$= (\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 v)(\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)$$

$$\times [\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{cn}^2 v\,\mathrm{dn}^2 v - \mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u + \mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{dn}^2 u$$

$$- \mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 v + \mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 v\,]^{-1}$$

$$= \frac{\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 v}{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v - \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u} \tag{AI. 8}$$

cn の加法定理

$$\mathrm{cn}(u+v) = \frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v} \tag{AI. 9}$$

を変形する。分子分母に $\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 v$ をかけると sn の場合と同様にして

$$\mathrm{cn}(u+v) = \frac{(\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v)(\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 v)}{\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{cn}^2 v\,\mathrm{dn}^2 v - \mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u}$$

$$= [\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v - \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{sn}^2 v$$

$$- \mathrm{sn}^3 u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}^3 v\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v\,]$$

$$\times [(\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v - \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)$$

$$\times (\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)]^{-1}$$

前式の分子 $= \mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 v)$

$$+ \mathrm{sn}\,u(1-\mathrm{sn}^2 u)\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{su}\,v\,\mathrm{dn}\,v$$

$$-\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v(1-\operatorname{sn}^2 v)\operatorname{dn} v-\operatorname{cn} u(1-k^2\operatorname{sn}^2 u)\operatorname{sn}^2 v\operatorname{cn} v$$

$$=\operatorname{sn}^2 u\operatorname{cn} u\operatorname{cn} v\operatorname{dn}^2 v+\operatorname{sn} u\operatorname{cn}^2 u\operatorname{dn} u\operatorname{sn} v\operatorname{dn} v$$

$$-\operatorname{sn} u\operatorname{dn} u\operatorname{sn} v\operatorname{cn}^2 v\operatorname{dn} v-\operatorname{cn} u\operatorname{dn}^2 u\operatorname{sn}^2 v\operatorname{cn} v$$

$$=(\operatorname{sn} u\operatorname{cn} u\operatorname{dn} v-\operatorname{sn} v\operatorname{cn} v\operatorname{dn} u)$$

$$\times(\operatorname{sn} u\operatorname{cn} v\operatorname{dn} v+\operatorname{sn} v\operatorname{cn} u\operatorname{dn} u) \tag{AI. 10}$$

ゆえに

$$\operatorname{cn}(u+v)=\frac{\operatorname{sn} u\operatorname{cn} u\operatorname{dn} v-\operatorname{sn} v\operatorname{cn} v\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u\operatorname{cn} v\operatorname{dn} v-\operatorname{sn} v\operatorname{cn} u\operatorname{dn} u} \tag{AI. 11}$$

$$\frac{w_4''}{w_3''}=\frac{43'\,1'\,3'\,(2^2-4^2)}{43'\,3'\,2'\,(12-34)}$$

$$=\frac{1'}{2'}\,\frac{2^2-4^2}{12-34} \tag{AI. 12}$$

$$=\left(\frac{u'-u_1}{u'-u_2}\right)^{1/2}\frac{(u-u_2)-(u-u_4)}{(u-u_1)^{1/2}(u-u_2)^{1/2}-(u-u_3)^{1/2}(u-u_4)^{1/2}}$$

(5.35)をいれて

$$=\frac{\dfrac{\operatorname{cn}(v',l)}{\operatorname{cn}(\zeta,l)}\left(\dfrac{\operatorname{dn}(v,l)}{\operatorname{dn}(\zeta,l)}\right)^2-\left(\dfrac{\operatorname{sn}(v,l)}{\operatorname{sn}(\zeta,l)}\right)^2}{\dfrac{\operatorname{dn}(v',l)}{\operatorname{dn}(\zeta,l)}\;\dfrac{\operatorname{cn}(v,l)}{\operatorname{cn}(\zeta,l)}\;\dfrac{\operatorname{dn}(v,l)}{\operatorname{dn}(\zeta,l)}-\dfrac{\operatorname{sn}(v,l)}{\operatorname{sn}(\zeta,l)}}$$

$$=\frac{\operatorname{cn}(v',l)}{\operatorname{cn}(\zeta,l)}\,\frac{\operatorname{dn}(\zeta,l)}{\operatorname{dn}(v',l)}\,\frac{[\operatorname{dn}(v,l)]^2[\operatorname{sn}(\zeta,l)]^2-[\operatorname{sn}(v,l)]^2[\operatorname{dn}(\zeta,l)]^2}{[\operatorname{dn}(\zeta,l)]^2[\operatorname{sn}(\zeta,l)]^2}$$

$$\times\frac{\operatorname{cn}(\zeta,l)\operatorname{dn}(\zeta,l)\operatorname{sn}(\zeta,l)}{\operatorname{cn}(v,l)\operatorname{dn}(v,l)\operatorname{sn}(\zeta,l)-\operatorname{sn}(v,l)\operatorname{cn}(\zeta,l)\operatorname{dn}(\zeta,l)}$$

$$=\frac{\operatorname{dn}^2(v,l)\operatorname{sn}^2(\zeta,l)-\operatorname{sn}^2(v,l)\operatorname{dn}^2(\zeta,l)}{[\operatorname{cn}(v,l)\operatorname{dn}(v,l)\operatorname{sn}(\zeta,l)-\operatorname{sn}(v,l)\operatorname{cn}(\zeta,l)\operatorname{dn}(\zeta,l)]\operatorname{sn}(\zeta,l)}$$

$$=\frac{\operatorname{sn}^2(\zeta,l)-\operatorname{sn}^2(v,l)}{\operatorname{cn}(v,l)\operatorname{dn}(v,l)\operatorname{sn}(\zeta,l)-\operatorname{sn}(v,l)\operatorname{cn}(\zeta,l)\operatorname{dn}(\zeta,l)}$$

$$\times\frac{1}{\operatorname{sn}(\zeta,l)} \tag{AI. 13}$$ *

---

* $l^2\operatorname{sn}^2(\zeta,l)\operatorname{sn}^2(v,l)$

$=\operatorname{sn}^2(\zeta,l)(\operatorname{dn}^2(v,l)-1)=\operatorname{sn}^2(v,l)(\operatorname{dn}^2(\zeta,l)-1)$

$\operatorname{sn}^2(\zeta,l)\operatorname{dn}^2(v,l)-\operatorname{sn}^2(v,l)\operatorname{dn}^2(\zeta,l)=\operatorname{sn}^2(\zeta,l)-\operatorname{sn}^2(v,l)$

(AI. 8)により

$$=\frac{\mathrm{sn}(v+\zeta,l)}{\mathrm{sn}(\zeta,l)} \tag{AI. 14}$$

また

$$\frac{w_1''}{w_3''}=\frac{43'\,1'\,2'\,(23-14)}{43'\,3'\,2'\,(12-34)}$$

$$=\frac{1'}{3'}\,\frac{23-14}{12-34} \tag{AI. 15}$$

$$=\frac{\mathrm{cn}(v',l)}{\mathrm{cn}(\zeta,l)}\,\frac{\dfrac{\mathrm{dn}(v,l)}{\mathrm{dn}(\zeta,l)}-\dfrac{\mathrm{cn}(v,l)}{\mathrm{cn}(\zeta,l)}\cdot\dfrac{\mathrm{sn}(v,l)}{\mathrm{sn}(\zeta,l)}}{\dfrac{\mathrm{cn}(v,l)}{\mathrm{cn}(\zeta,l)}\cdot\dfrac{\mathrm{dn}(v,l)}{\mathrm{dn}(\zeta,l)}-\dfrac{\mathrm{sn}(v,l)}{\mathrm{sn}(\zeta,l)}}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{cn}(\zeta,l)}\,\frac{\mathrm{dn}(v,l)\,\mathrm{cn}(\zeta,l)\,\mathrm{sn}(\zeta,l)-\mathrm{cn}(v,l)\,\mathrm{sn}(v,l)\,\mathrm{dn}(\zeta,l)}{\mathrm{cn}(v,l)\,\mathrm{dn}(v,l)\,\mathrm{sn}(\zeta,l)-\mathrm{sn}(v,l)\,\mathrm{cn}(\zeta,l)\,\mathrm{dn}(\zeta,l)} \tag{AI. 16}$$

(AI. 11)により

$$=\frac{\mathrm{cn}(v+\zeta,l)}{\mathrm{cn}(\zeta,l)} \tag{AI. 17}$$

同様に(証略)

$$\frac{w_2''}{w_3''}=\frac{\mathrm{dn}(v+\zeta,l)}{\mathrm{dn}(\zeta,l)} \tag{AI. 18}$$

(AI. 14), (AI. 17), (AI. 18)より v を $v-v'$ でおきかえると(5.40)が得られる。

Appendix II 楕円関数

楕円関数に関する必要な定義と公式をまとめておく。

$\mathscr{I}m\,\tau>0,\quad q=\mathrm{e}^{\pi i\tau}$ として

$$\vartheta_4(z,q)\equiv\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\mathrm{e}^{2\pi i z}$$

$$\vartheta_1(z,q)\equiv\frac{1}{i}q^{1/4}\,\mathrm{e}^{\pi i z}\vartheta_4\left(z+\frac{\tau}{2},q\right)$$

$$\vartheta_2(z,q)\equiv q^{1/4}\,\mathrm{e}^{\pi i z}\vartheta_4\left(z+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2},q\right)$$

$$\vartheta_3(z, q) \equiv \vartheta_4\left(z+\frac{1}{2}, q\right) \tag{AⅡ. 1}$$

を楕円テータ関数という。

$$k \equiv \frac{\vartheta_2^2(0)}{\vartheta_3^2(0)} \qquad k' \equiv \frac{\vartheta_4^2(0)}{\vartheta_3^2(0)} \tag{AⅡ. 2}$$

k を modulus という。

$$K_k \equiv \frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2(0) \qquad K_k' = -\frac{i\pi\tau}{2}\vartheta_3^2(0) \tag{AⅡ. 3}$$

K_k と K_k' はそれぞれ k と k' の第１種完全楕円積分で表わされる。

$$K_k = \int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \qquad K_k' = \int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}} \tag{AⅡ. 4}$$

$$\mathrm{sn}(u, k) \equiv \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\vartheta_1(u/2, K_k)}{\vartheta_4(u/2, K_k)}$$

$$\mathrm{cn}(u, k) \equiv \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\vartheta_2(u/2, K_k)}{\vartheta_4(u/2, K_k)}$$

$$\mathrm{dn}(u, k) \equiv \sqrt{k'}\,\frac{\vartheta_3(u/2, K_k)}{\vartheta_4(u/2, K_k)} \tag{AⅡ. 5}$$

を Jacobi の楕円関数という。

$\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$ は２重周期関数であってその周期は

$$\begin{aligned} &\mathrm{sn}\,u : 4K,\ 2iK' \\ &\mathrm{cn}\,u : 4K,\ 2K+2iK' \\ &\mathrm{dn}\,u : 2K,\ 4iK' \end{aligned} \tag{AⅡ. 6}$$

である。　$\mathrm{sn}(u, k)$ は第１種楕円積分

$$u = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \tag{AⅡ. 7}$$

の逆関数

$$z = \mathrm{sn}(u, k)$$

である。

次の関係式

$$\begin{cases} \mathrm{sn}^2 u + \mathrm{cn}^2 u = 1 \\ k^2\,\mathrm{sn}^2 u + \mathrm{dn}^2 u = 1 \end{cases} \tag{AⅡ. 8}$$

および加法公式

$$\mathrm{sn}(u+v)=\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v+\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,v}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v}$$

$$\mathrm{cn}(u+v)=\frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,v}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v}$$

$$\mathrm{dn}(u+v)=\frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v-k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2\,v} \tag{AII. 9}$$

が成立つ。

$k\to 0$ のとき $k'\to 1$, $K\to\pi/2$, $K'\to\infty$ $\mathrm{sn}\,u\to\sin u$, $\mathrm{cn}\,u\to\cos u$, $\mathrm{dn}\,u\to 1$ となる。

$$H(u)\equiv\vartheta_1\left(\frac{u}{2K},\ q\right)$$

$$\Theta(u)\equiv\vartheta_4\left(\frac{u}{2K},\ q\right) \tag{AII. 10}$$

をJacobiのtheta functionという。

$$\mathrm{sn}(u,k)=\frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{H(u)}{\Theta(u)} \tag{AII. 11}$$

が成立つ。

次のFourier級数が成立つ。

$$\log\frac{\vartheta_4(v+w)}{\vartheta_4(v-w)}=2i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nv\,\sin 2\pi nw}{n\sin\pi n\tau}$$

$$\log\frac{\vartheta_1(v+w)}{\vartheta_1(v-w)}=-\pi i-2\pi iv+2i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nv\sin 2\pi n\left(w-\frac{\tau}{2}\right)}{n\sin\pi n\tau} \tag{AII. 12}$$

導関数

$$(\mathrm{sn}\,u)'=\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u$$

$$(\mathrm{cn}\,u)'=-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u$$

$$(\mathrm{dn}\,u)'=-k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u \tag{AII. 13}$$

倍数公式

$$\mathrm{sn}\,2u=\frac{2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^4\,u}$$

$$\mathrm{cn}\ 2u = \frac{\mathrm{cn}^2 u - \mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^4 u}$$

$$\mathrm{dn}\ 2u = \frac{\mathrm{dn}^2 u - k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{cn}^2 u}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^4 u} \qquad (\text{AⅡ. }14)$$

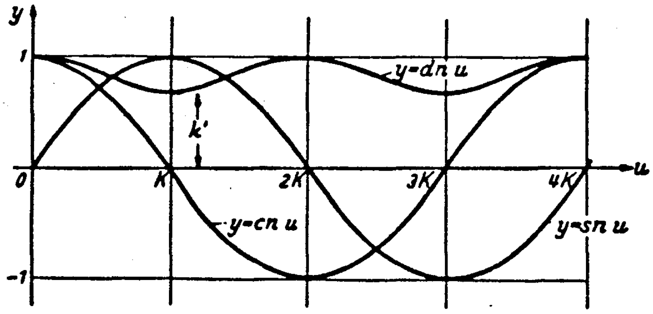


Fig. 10.

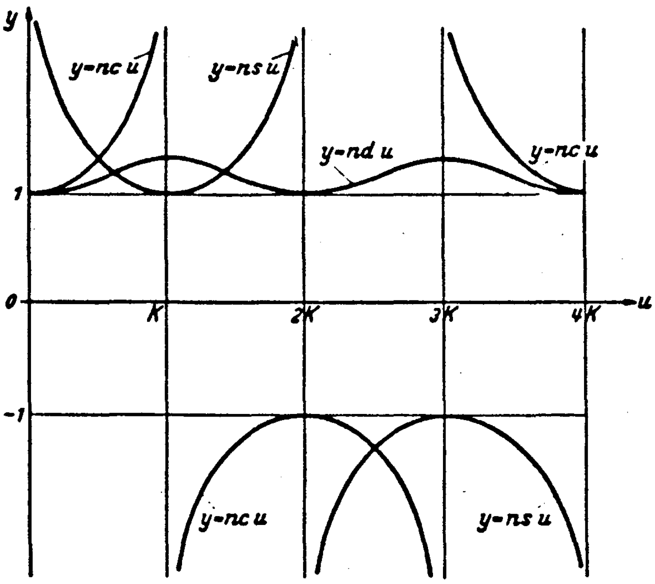


Fig. 11.

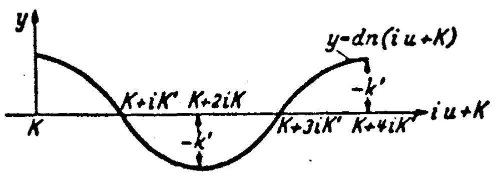


Fig. 12.

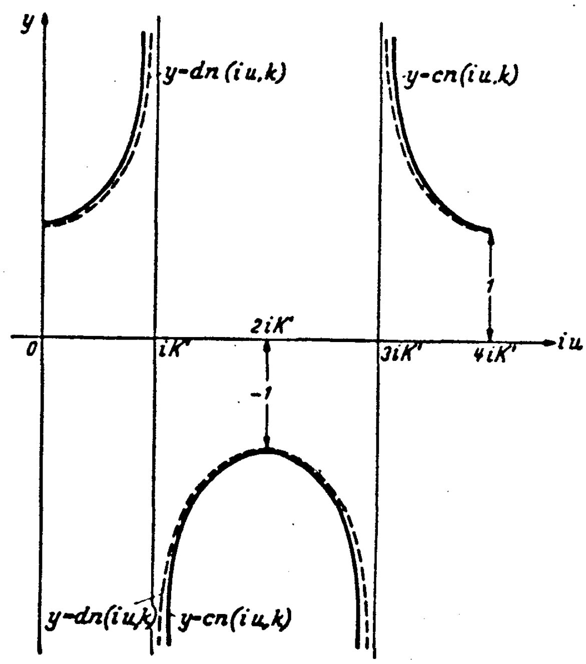


Fig. 13.

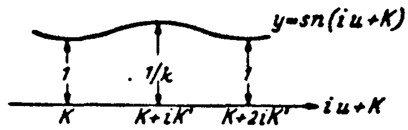


Fig. 14.

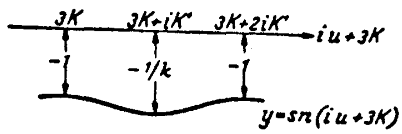


Fig. 15.

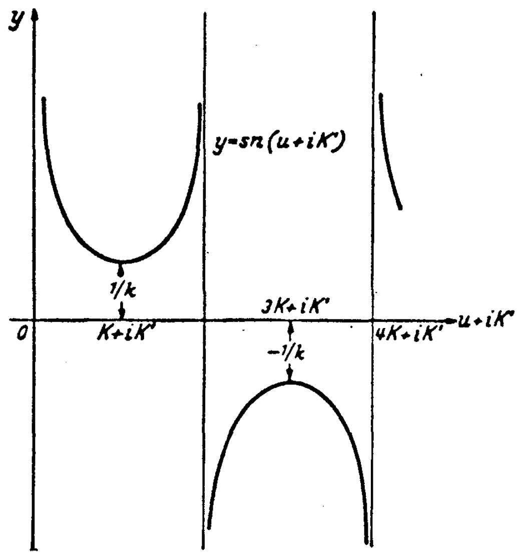


Fig. 16.

Fig.12 Jacobian Elliptic Functions.
Byrd and Friedman, Handbook
of Elliptic Integralsによる。